ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Геометрія 9

Єршова А. П., Голобородько В. В.,
Крижановський О. Ф., Єршов С. В.

Геометрія

«Геометрія»

підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти

Видавництво «Ранок»

Геометрія

Підручник для 9 класу закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, перероблене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»

Дорогі друзі!

У цьому навчальному році завершується вивчення планіметрії — геометрії на площині. Радимо ще перед початком занять пригадати основні поняття й теореми, що їх ви вивчали в 7–8 класах. Усі вони відомі з часів Давньої Греції і належать до елементарної (евклідової) геометрії. Але в дев'ятому класі ви познайомитеся з геометричними методами, які було винайдено значно пізніше, у XIV–XX ст.: координатним, векторним і методом геометричних перетворень. Вони набули широкого застосування в техніці й природничих науках, насамперед у фізиці, тому, вивчаючи їх, ви краще зрозумієте деякі фізичні закони. Узагалі геометрію 9 класу можна без перебільшення назвати *геометрією методів*.

За допомогою цього підручника ви навчитеся розв'язувати будь-які, а не тільки прямокутні, трикутники; поглибите свої знання в галузі логіки; дізнаєтесь про життя і здобутки відомих учених минулого. Майже в кожному параграфі вам запропоновано довести математичне твердження або навести приклад, провести аналогію, тобто самостійно рушити до нових знань.

Отже, скарби геометрії чекають на тих, хто вдумливо і спостережливо досліджуючи їх, зможе не тільки віднайти, але й оцінити справжню красу й витонченість геометричних знань. Ми дуже сподіваємось, що це будете саме ви.

Бажаємо вам успіхів!

Інтернет-підтримка
за QR-кодом
або посиланням
rnk.com.ua/100627

Як користуватися підручником

Підручник має п'ять розділів, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття й факти виділено кольоровим шрифтом.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. *Усні вправи* допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки, провести необхідні міркування в чернетці. Після них можна переходити до *графічних вправ*, які виконуються в зошиті або на комп'ютері. Далі йдуть *письмові задачі*. Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання *рівня А*. Більш складними є задачі *рівня Б*. Якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі *рівня В*. Значки і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд учителя можуть бути використані відповідно для роботи в парах і групах. Після кожного параграфа в рубриці *«Повторення»* зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення нового матеріалу, а також указано відповідні параграфи в підручниках для 7 і 8 класів* та наведено задачі, які підготують вас до сприйняття наступної теми. Більшість задач підручника супроводжуються відповідями, які наведені наприкінці підручника.

Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких позначено значком . Наприкінці кожного розділу подано контрольні запитання й типові задачі для контрольних робіт, завдяки яким ви зможете систематизувати свої знання та вдосконалити вміння й навички. Звернувшись до інтернет-підтримки, ви зможете самостійно перевірити рівень вашої підготовки, пройшовши онлайн-тестування. Про можливість скористатися матеріалами сайту вам нагадуватиме значок . Додаткові задачі до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а задачі підвищеної складності відкриють нові грані геометрії та красу нестандартного мислення. Зверніть увагу також на матеріали рубрики *«Готуємося до ДПА»*, зокрема *задачі для повторення курсу геометрії 7–9 класів*, подані після останнього розділу, — вони допоможуть вам краще підготуватися до підсумкової атестації.

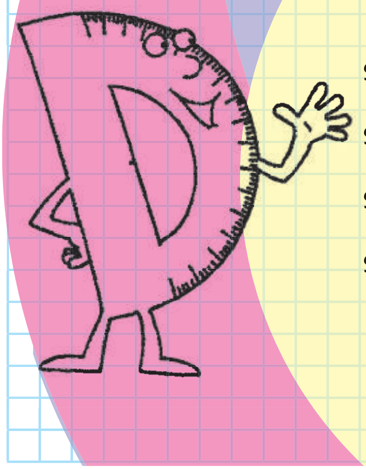
Підсумки наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. Рубрики *«Історична довідка»* і *«Математичні олімпіади»* познайомлять із цікавими фактами про розвиток геометрії та математичного олімпіадного руху, з діяльністю відомих українських та зарубіжних учених.

---

* Єршова, А. П. Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський. — Харків : Вид-во «Ранок». — 2015. — 224 с. : іл.; Єршова, А. П. Геометрія : Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. [Текст] / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов.— 2-ге вид., перероб.— Харків : Вид-во «Ранок», 2021. — 256 с. : іл.

Розділ I

Розв'язування *трикутників*



Трикутник є першою фігурою, яка не може розкластися в простіші фігури... і тому є першим фундаментом будь-якої речі, яка має межу й форму.

Джордано Бруно, італійський учений

У восьмому класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники, тобто знаходити їхні невідомі елементи за відомими. Теоретичним підґрунтям для розв'язування прямокутних трикутників були теорема Піфагора й властивості *тригонометричних функцій* гострого кута прямокутного трикутника — синуса, косинуса, тангенса й котангенса. За допомогою теорем і співвідношень, які розглядатимуться в цьому розділі, можна розв'язати не тільки прямокутний, але й узагалі будь-який трикутник.

Застосування тригонометричних функцій дозволяє отримати нові формули для знаходження окремих елементів та площ многокутників і значно розширює можливості використання алгебри в процесі розв'язування геометричних задач.

§ 1 Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°

1.1. Означення тригонометричних функцій на колі

Нагадаємо, що в прямокутному трикутнику з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α (рис. 1) за раніше даним означенням

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

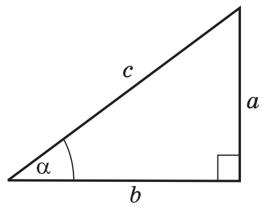
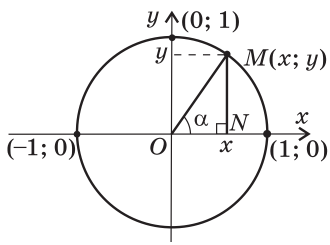


Рис. 1. До означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника

Дамо означення тригонометричних функцій для будь-якого кута від 0° до 180°. У прямокутній системі координат побудуємо коло радіуса 1 із центром у початку координат (рис. 2). Таке коло називають тригонометричним. Від додатної півосі осі Ox відкладемо в напрямі проти ходу годинникової стрілки гострий кут α. Нехай $M(x;\ y)$ — точка, в якій сторона цього кута перетинає дане коло (рис. 2, a). Проведемо перпендикуляр MN до осі Ox. Утворився прямокутний трикутник OMN з гострим кутом α, гіпотенузою $OM = 1$ і катетами, довжини яких дорівнюють координатам точки M: $ON = x$, $MN = y$. Із трикутника OMN маємо:

$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y,\ \cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{x}{y}.$$



а

Рис. 2. До означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180°
[Див. також с. 8]

Отже, у тригонометричному колі синус і косинус гострого кута дорівнюють відповідно ординаті й абсцисі точки, в якій сторона даного кута перетинає коло, а тангенс і котангенс цього кута дорівнюють відношенням ординати до абсциси й абсциси до ординати відповідно:

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Зазначимо, що значення тригонометричних функцій залежать лише від градусної міри кута. Використаємо отримані рівності для означення тригонометричних функцій будь-якого кута від 0° до 180°.

Означення

Для будь-якого кута α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(\alpha \neq 90°)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$ $(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$, де x, y — координати відповідної точки M тригонометричного кола (рис. 2).

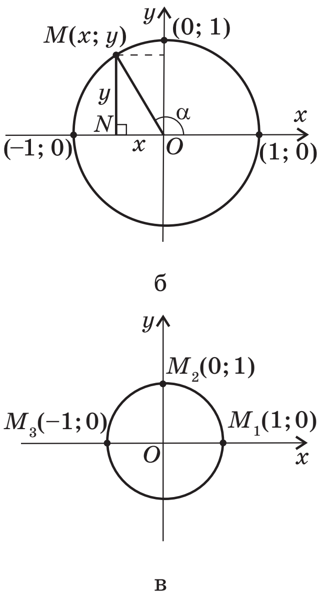


Рис. 2. [Закінчення]

Отже, якщо кут α тупий $(90° < \alpha < 180°$, рис. 2, *б*), то ордината точки M додатна (тобто $\sin\alpha > 0$), а абсциса від'ємна (тобто $\cos\alpha < 0$). Очевидно, що відношення координат у цьому випадку також від'ємні, тобто $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. Узагалі, косинуси, тангенси й котангенси тупих кутів є від'ємними числами. І навпаки, якщо косинус, тангенс або котангенс кута α $(\alpha < 180°)$ від'ємні, то кут α тупий.

Визначимо значення тригонометричних функцій кутів 0°, 90°, 180° (рис. 2, *в*). Якщо $\alpha = 0°$, то точка M_1 має координати (1; 0). Звідси $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 0°$ не існує.

Якщо $\alpha = 90°$, то точка M_2 має координати (0; 1). Звідси $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg} 90° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{tg} 90°$ не існує.

І, нарешті, якщо $\alpha = 180°$, то точка M_3 має координати (–1; 0). Звідси $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 180°$ не існує.

Зауважимо також, що абсциси точок M для кутів від 0° до 180° змінюються в межах від –1 до 1, тобто $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, а ординати — у межах від 0 до 1, тобто $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

1.2. *Тригонометричні тотожності*

Нагадаємо, що для будь-якого гострого кута α прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Покажемо, що це співвідношення справджується для будь-якого кута від 0° до 180°.

Справді, якщо кут α тупий (див. рис. 2, *б*), то з прямокутного трикутника OMN ($\angle N = 90°$, $ON = |x|$, $MN = y$, $OM = 1$) за теоремою Піфагора маємо $MN^2 + ON^2 = OM^2$, тобто $x^2 + y^2 = 1$, і, з урахуванням означень синуса й косинуса, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. У випадку, коли кут α дорівнює 0°, 90° або 180°, цю тотожність легко перевірити безпосередньою підстановкою значень синуса й косинуса відповідного кута (зробіть це самостійно).

Отже, для будь-якого кута α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180° випливає, що

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Знак $\cos\alpha$ обирають залежно від того, чи є кут α гострим (знак «+») або тупим (знак «−»).

Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \neq 90°), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (0° < \alpha < 180°),$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 90°,\ \alpha \neq 180°).$$

У восьмому класі для гострого кута α було доведено формули доповнення, які виражають функції кута $(90° - \alpha)$ через функції кута α:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Доведемо формули, що дозволяють звести розгляд тригонометричних функцій кутів $(180° - \alpha)$ до розгляду функцій кута α.

Теорема (формули зведення для кутів $180° - \alpha$)

Для будь-якого кута α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$

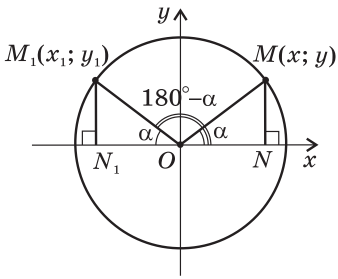


Рис. 3. До доведення формул зведення для кутів від 0° до 180°

Доведення

□ Нехай від додатної півосі осі Ox відкладено кути α і $180° - \alpha$, причому сторони цих кутів перетинають тригонометричне коло в точках M і M_1 відповідно (рис. 3). Розглянемо випадок, коли кут α гострий (для тупих кутів доведення аналогічне). Проведемо з точок M і M_1 перпендикуляри MN і M_1N_1 до осі Ox. Оскільки кут N_1OM_1 доповнює кут $180° - \alpha$ до розгорнутого, то $\angle N_1OM_1 = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$, а прямокутні трикутники OMN і OM_1N_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Із рівності катетів MN і M_1N_1 випливає, що точки M і M_1 мають однакові ординати, тобто

$$\sin(180° - \alpha) = y_1 = y = \sin\alpha.$$

Крім того, з рівності катетів ON і ON_1 випливає, що абсциси точок M і M_1 протилежні, тобто

$$\cos(180° - \alpha) = x_1 = -x = -\cos\alpha.$$

Для випадків, коли кут α дорівнює 0°, 90° і 180°, перевірте правильність формул зведення самостійно. ■

Наслідок

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \ (0° \leqslant \alpha \leqslant 180°,\ \alpha \neq 90°),$$
$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \ (0° < \alpha < 180°).$$

Задача

Обчисліть значення тригонометричних функцій кута 150°.

Розв'язання

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 150° = \operatorname{tg}(180° - 30°) = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = \operatorname{ctg}(180° - 30°) = -\operatorname{ctg} 30° = -\sqrt{3}$.

Відповідь: $\sin 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 150° = -\sqrt{3}$.

Наведемо значення тригонометричних функцій деяких кутів у вигляді таблиці.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Запитання і задачі

Усні вправи

1. Сторона кута α, відкладеного від додатної півосі осі Ox у напрямі проти годинникової стрілки, перетинає тригонометричне коло в точці M.
   а) Назвіть координати точки M, якщо $\alpha = 90°$.
   б) Визначте величину кута α, якщо $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Визначте, чи є кут α $(0° < \alpha < 180°)$ гострим, прямим або тупим, якщо:
   а) $\cos\alpha = 0$; б) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha > 0$.
3. Чи може косинус тупого кута дорівнювати 0,01; –0,8; –3? Чи може косинус тупого кута дорівнювати синусу того самого кута?
4. Дано гострий кут β, причому $\sin\beta = n$, $\cos\beta = m$. Знайдіть синус і косинус кута $(180° - \beta)$.
5. Чи є правильним твердження:
   а) синуси суміжних кутів є протилежними числами;
   б) тангенси суміжних кутів є протилежними числами?

Графічні вправи

6. У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку M, яка відповідає куту $120°$.
а) Проведіть із точки M перпендикуляри до осей координат. Визначте координати основ цих перпендикулярів.
б) Позначте на тригонометричному колі точку M_1, що відповідає гострому куту, синус якого дорівнює синусу $120°$. Виміряйте цей гострий кут і обґрунтуйте отриманий результат.

7. У прямокутній системі координат на тригонометричному колі позначте точку M, яка відповідає куту $150°$.
а) Визначте координати x і y точки M. Яка з координат більша?
б) Обчисліть значення виразу $x^2 + y^2$. Обґрунтуйте отриманий результат.

Письмові вправи

Рівень А

8. За допомогою формул зведення для кутів $(180° - \alpha)$ обчисліть синус, косинус і тангенс кутів $120°$ і $135°$.

9. За допомогою формул зведення і тригонометричних таблиць (калькулятора) обчисліть:
а) $\sin 160°$; б) $\cos 115°$; в) $\operatorname{tg} 95°$.

10. Визначте всі значення α від $0°$ до $180°$, для яких справджується рівність:
а) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -0{,}5$; в) $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

11. За допомогою формул зведення й таблиці значень тригонометричних функцій (див. Довідкові матеріали на с. 236–238) знайдіть:
а) $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\alpha = 170°$;
б) гострий і тупий кути, синуси яких дорівнюють 0,643.

12. Знайдіть:
а) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;
б) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $90° < \alpha < 180°$;
в) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -1$.

13. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}6$ і кут α тупий.

14. Порівняйте:
а) $\cos 65°$ і $\cos 115°$;
б) $\operatorname{tg} 48°$ і $\operatorname{tg} 148°$;
в) $\sin 35°$ і $\sin 145°$.

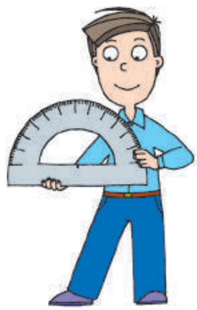
15. Доведіть тотожність:
а) $-\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$;
б) $\cos^2\alpha+\sin\alpha\sin(180°-\alpha)=1$.

16. Доведіть тотожність:
а) $\dfrac{-\sin\alpha}{\cos(180°-\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;
б) $1-\cos^2\alpha=\sin\alpha\sin(180°-\alpha)$;
в) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)}{\sin\alpha}=1$.

Рівень Б

17. Знайдіть тангенс і котангенс кута α, якщо:
а) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$;
б) $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$, $90°<\alpha<180°$;
в) $\sin\alpha=-\cos\alpha$.

18. Знайдіть:
а) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0{,}28$;
б) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ і кут α тупий.



19 (опорна). Доведіть, що:
а) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(0°\leqslant\alpha\leqslant180°,\ \alpha\neq90°)$;
б) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0°<\alpha<180°)$.

20. Спростіть вираз:
а) $1-\sin(180°-\alpha)\cos(180°-\alpha)\operatorname{tg}(180°-\alpha)$;
б) $1-\operatorname{tg}(180°-\alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

21. Спростіть вираз:
а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha\cos(180°-\alpha)$;
б) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-2\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos^2\alpha$.

22. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$.
23. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = -2{,}4$.
24. Доведіть, що синуси будь-яких двох кутів паралелограма рівні.
25. Доведіть, що сума косинусів усіх кутів трапеції дорівнює нулю.
26. Побудуйте кут α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; і кут α гострий; б) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

27. Побудуйте кут α, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

Рівень В

28. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = -2{,}5$. Скільки розв'язків має задача?
29. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}5$. Скільки розв'язків має задача?
30. Розташуйте кути 50°, 120°, 170° у порядку зростання значень їхніх тригонометричних функцій:

а) косинусів; б) синусів; в) тангенсів.

31. Відомо, що α і β — тупі кути, причому $\cos\alpha > \cos\beta$. Порівняйте:

а) $\sin\alpha$ і $\sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\beta$.

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників; 8 клас, § 19–21
- теорема Піфагора. 8 клас, § 13

Задачі

32. У прямокутному трикутнику з гострим кутом 30° гіпотенуза дорівнює 6 см. Знайдіть катети трикутника.
33. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 8 см і 9 см. Знайдіть площу ромба. Скільки розв'язків має задача?

§2 Теорема косинусів та наслідки з неї

2.1. Теорема косинусів

Під час розв'язування задач часто виникає необхідність обчислити невідому сторону трикутника за двома відомими сторонами й кутом між ними. Теорема Піфагора дозволяє зробити це у випадку, коли даний кут прямий. Наступна теорема є узагальненням теореми Піфагора й дозволяє знаходити невідому сторону в довільному трикутнику.

Теорема (косинусів)

Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

де a, b, c — сторони трикутника, кут C — кут між сторонами a і b.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Розглянемо одночасно два випадки, коли кути A і C обидва гострі (рис. 4, *а*) та коли кут A тупий, а кут C гострий (рис. 4, *б*). Проведемо висоту BD. Із прямокутного трикутника BDC маємо: $BD = a\sin C$, $CD = a\cos C$. Тоді $AD = |b - a\cos C|$. Із прямокутного трикутника ABD за теоремою Піфагора:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,\ c^2 = (a\sin C)^2 + (b - a\cos C)^2,$$
$$c^2 = a^2\sin^2 C + b^2 - 2ab\cos C + a^2\cos^2 C,$$
$$c^2 = a^2(\sin^2 C + \cos^2 C) + b^2 - 2ab\cos C,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

У випадку, коли кут C прямий, маємо $\cos C = \cos 90° = 0$. Тоді твердження теореми набуває вигляду $c^2 = a^2 + b^2$, тобто збігається з твердженням вже доведеної теореми Піфагора.

Доведення для випадку, коли кут C тупий (рис. 4, *в*), проведіть самостійно. ■

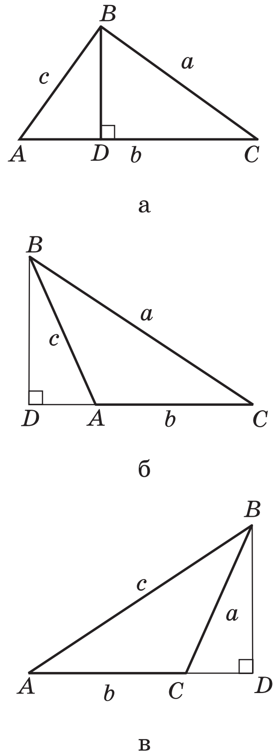


Рис. 4. До доведення теореми косинусів

Задача

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°.

Розв'язання

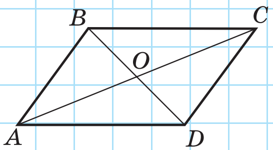


Рис. 5

Нехай діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, $AC = 16$ см, $BD = 10$ см, $\angle AOB = 60°$ (рис. 5). Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то $AO = OC = 8$ см, $BO = OD = 5$ см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos\angle AOB$,

$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos 60°$.

Оскільки $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то $AB^2 = 49$, $AB = 7$ (см).

Оскільки $\angle AOD = 120°$ як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

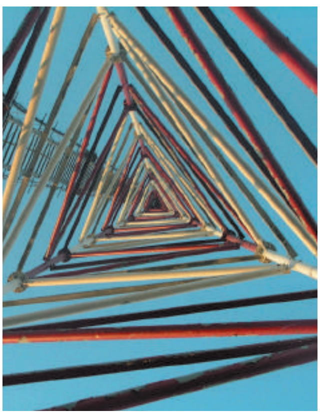
$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \cdot OD \cos\angle AOD$,

$AD^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5\cos 120°$.

Оскільки $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, то $AD^2 = 129$, $AD = \sqrt{129}$ (см).

Відповідь: 7 см і $\sqrt{129}$ см.

2.2. *Наслідки з теореми косинусів*



Завдяки своїм наслідкам теорема косинусів дає можливість не тільки знаходити невідому сторону трикутника, але й визначати кути трикутника за відомими сторонами (див. рис. 4).

Наслідок 1

У трикутнику ABC $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Наслідок 2

Якщо в трикутнику зі сторонами a, b, c справджується нерівність $a^2 + b^2 > c^2$, то кут, протилежний стороні c, гострий; якщо $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні c, тупий.

Дійсно, якщо у формулі, наведеній у наслідку 1, $a^2+b^2>c^2$, то $\cos C>0$, отже, кут C гострий, якщо $a^2+b^2<c^2$, то $\cos C<0$, отже, кут C тупий.

Нагадаємо, що у випадку, коли $a^2+b^2=c^2$, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, кут, протилежний стороні c, прямий.

Таким чином, за допомогою теореми косинусів можна однозначно встановити, чи є трикутник із заданими сторонами гострокутним, прямокутним або тупокутним.

Наслідком із теореми косинусів можна вважати також таку властивість паралелограма.

Опорна задача (про співвідношення діагоналей і сторін паралелограма)

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$, *де* d_1 *і* d_2 *— діагоналі паралелограма,* a *і* b *— сусідні сторони паралелограма.*

Доведіть.

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AB=CD=a$, $AD=BC=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$, $\angle BAD=\gamma$ (рис. 6). Оскільки сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°, то $\angle ABC=180°-\gamma$. Виразимо квадрати діагоналей паралелограма за допомогою теореми косинусів.

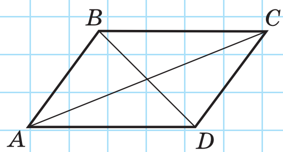


Рис. 6

Із трикутника ABD маємо:

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\gamma$, $d_1{}^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

Із трикутника ABC маємо:

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos(180°-\gamma)$,

або, враховуючи, що $\cos(180°-\gamma)=-\cos\gamma$,

$d_2^2=a^2+b^2+2ab\cos\gamma$.

Додаючи праві й ліві частини отриманих рівностей, одержимо: $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$, що й треба було довести.

Запитання і задачі

Усні вправи

34. У трикутнику зі сторонами a, b, c визначте, чи є кут, протилежний стороні a, гострим, прямим або тупим, якщо:
а) $a^2 > b^2 + c^2$; б) $a^2 < b^2 + c^2$; в) $a^2 = b^2 + c^2$.

35. Чи можуть бути від’ємними косинуси двох кутів трикутника?

36. Назвіть найбільший кут трикутника ABC, якщо $AB^2 > BC^2 + AC^2$.

Графічні вправи

37. Накресліть трикутник зі сторонами 3 см і 5 см та кутом між ними 120°. За теоремою косинусів обчисліть довжину найбільшої сторони трикутника. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

38. Накресліть різносторонній трикутник і виміряйте його сторони.
а) Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$, де a, b, c — довжини сторін трикутника, причому $a < b < c$.
б) За результатом обчислення визначте, чи є найбільший кут трикутника гострим, прямим або тупим. Перевірте отриманий результат вимірюванням.

Письмові вправи

Рівень А

39. Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо дві його сторони і кут між ними дорівнюють відповідно:
а) $3\sqrt{3}$ см, 11 см і 30°; в) 5 см, 16 см і 120°.
б) 8 см, 15 см і 60°;

40. Знайдіть периметр трикутника, якщо його сторони завдовжки 7 см і 15 см утворюють кут 60°.

41. Сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$, 1 і 5. Визначте градусну міру найбільшого кута трикутника.

42. Доведіть, що рівнобедрений трикутник з основою 7 см і бічною стороною 4 см є тупокутним.

43. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 і 8. Яке найменше ціле значення повинна мати довжина третьої сторони, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

44. Дві сторони трикутника дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 1 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

45. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 5$ см, а косинус зовнішнього кута при вершині B дорівнює $-0{,}2$. Знайдіть сторону AC.

Рівень Б

46. У паралелограмі знайдіть довжини:
а) сторін, якщо діагоналі завдовжки $6\sqrt{2}$ см і 14 см перетинаються під кутом 45°;
б) діагоналей, якщо сторони дорівнюють 10 см і 16 см, а один із кутів паралелограма вдвічі більший за інший.

47. Знайдіть діагоналі ромба з периметром $4a$ і гострим кутом α. Розв'яжіть задачу двома способами.

48. Діагональ паралелограма дорівнює 6 см і утворює зі стороною завдовжки 8 см кут 60°. Знайдіть невідому сторону й невідому діагональ паралелограма.

49. Не обчислюючи кутів трикутника, визначте його вид (за величиною кутів), якщо сторони трикутника дорівнюють:
а) 2, 3 і 4; б) 7, 24 і 25; в) 6, 10 і 11.

50. Сторони трикутника дорівнюють 5 м, 6 м і 7 м. Знайдіть косинуси кутів трикутника й визначте його вид (за величиною кутів).

51. У паралелограмі знайдіть:
а) периметр, якщо діагоналі дорівнюють 11 см і 17 см, а одна зі сторін — 13 см;
б) діагоналі, якщо їхні довжини відносяться як 4 : 7, а сторони дорівнюють 7 см і 9 см.

52. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см, а діагоналі 11 см і 13 см.

Рівень В

53. У трикутнику ABC $\angle A = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. На катеті AC зовні даного трикутника побудовано рівносторонній трикутник ACD. Знайдіть довжину відрізка BD.

54. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 2$, $BC = 4$. Точки M і N — середини сторін BC і CD відповідно. Знайдіть косинус кута MAN.

55. Сторони трикутника завдовжки 10 см і 42 см утворюють кут 120°. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини даного кута.

56 (опорна). *У трикутнику зі сторонами a, b, c до сторони c проведена медіана m_c. Доведіть, що справджується формула*

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}.$$

57. Якщо для медіан трикутника m_a, m_b і m_c справджується рівність $m_a^{\ 2} + m_b^{\ 2} = 5m_c^{\ 2}$, то цей трикутник є прямокутним з гіпотенузою c. Доведіть. Чи справджується обернене твердження?

58. У трапеції $ABCD$ $AD \parallel CB$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає відрізок AD в точці K, причому $\angle AKB = 60°$. Знайдіть BK.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- пропорції; — 6 клас
- розв'язування прямокутних трикутників; — 8 клас, § 19–21
- коло, описане навколо трикутника. — 7 клас, п. 23.1

Задачі

59. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 45°$, $BD = 4$ см — висота трикутника. Знайдіть довжини сторін AB і BC.

60. На колі позначено точки A, B, C і D так, що кут ABC утричі менший, ніж кут ADC. Знайдіть градусні міри цих кутів.

§ 3 Теорема синусів та наслідки з неї

3.1. Теорема синусів

Розглянемо ще одну теорему, за допомогою якої можна знаходити невідомі сторони й кути трикутника.

Теорема (синусів)

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно.

Доведення

□ Нехай у трикутнику ABC $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Проведемо висоту CD.

Якщо кут A гострий (рис. 7, *а*), то з прямокутного трикутника ACD маємо $CD=b\sin A$; якщо кут A тупий (рис. 7, *б*), то $CD=b\sin(180°-A)=b\sin A$. Аналогічно з трикутника BCD маємо $CD=a\sin B$. Прирівняємо отримані вирази:

$$b\sin A=a\sin B,\text{ або }\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Аналогічно доводиться рівність $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

У випадку, коли кут A прямий, твердження теореми випливає з означення синусів кутів трикутника ABC (обґрунтуйте це самостійно). ■

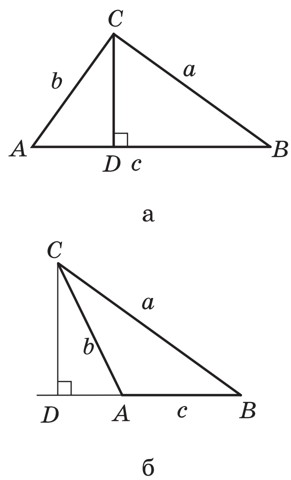


Рис. 7. До доведення теореми синусів

Задача

Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює зі сторонами паралелограма кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

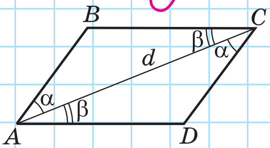


Рис. 8

Розв'язання

Нехай у паралелограмі $ABCD$ $AC = d$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ (рис. 8). Знайдемо сторони паралелограма. Кути CAD і ACB — внутрішні різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січній AC, тому $\angle ACB = \beta$.

Тоді в трикутнику ABC $\angle B = 180° - (\alpha + \beta)$. Застосувавши теорему синусів для цього трикутника, одержимо:

$$\frac{AC}{\sin(180° - (\alpha+\beta))} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ або}$$

$$\frac{d}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}. \text{ Звідси } AB = \frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$BC = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Відповідь: $\dfrac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\dfrac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

3.2. Зв'язок між пропорційними відношеннями теореми синусів і діаметром описаного кола

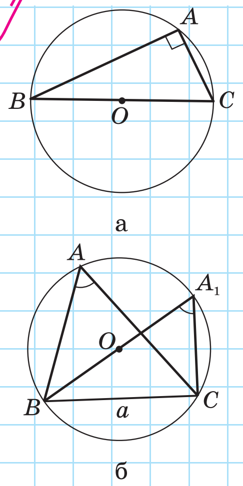


Рис. 9. [Див. також с. 23]

Опорна задача

(повне формулювання теореми синусів)

Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно, R — радіус описаного кола. Доведіть.

Розв'язання

Нехай навколо трикутника ABC ($BC = a$) описано коло радіуса R. Враховуючи пропорційні співвідношення теореми синусів, достатньо довести, що $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, або $a = 2R\sin A$.

1) Нехай $\angle A = 90°$ (рис. 9, *а*). Тоді вписаний кут A спирається на півколо, тобто $a = BC = 2R = 2R \cdot 1 = 2R\sin 90° = 2R\sin A$.
2) Нехай $\angle A < 90°$ (рис. 9, *б*). Проведемо діаметр BA_1 і розглянемо трикутник A_1BC.
У цьому трикутнику $\angle BCA_1 = 90°$ як кут, що спирається на півколо, тобто $BC = BA_1 \sin A_1$. Оскільки вписані кути A і A_1 спираються на ту саму дугу, то $\angle A = \angle A_1$. Тоді $BC = BA_1 \sin A = 2R\sin A$, або $a = 2R\sin A$.
3) Нехай $\angle A > 90°$ (рис. 9, *в*). Проведемо діаметр BA_1. Тоді $\angle A + \angle A_1 = 180°$, звідки $\sin A_1 = \sin(180° - A) = \sin A$. Отже, $BC = BA_1 \sin A$, або $a = 2R\sin A$, що й треба було довести.

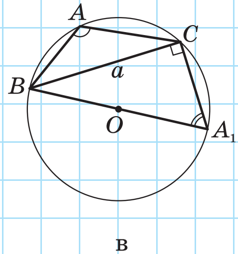


Рис. 9. [Закінчення]

Задача

Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами 1 і 3 та бічною стороною 2.

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = 3$, $BC = 1$, $AB = CD = 2$ (рис. 10). Проведемо з вершин тупих кутів трапеції висоти BB_1 і CC_1. Тоді $AB_1 = B_1C_1 = C_1D = 1$ (доведіть це самостійно).

З прямокутного трикутника ABB_1 $\cos A = \frac{AB_1}{AB}$, $\cos A = \frac{1}{2}$, звідки $\angle A = 60°$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Із трикутника ABD за теоремою косинусів маємо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos A$, $BD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$, $BD^2 = 7$, $BD = \sqrt{7}$.

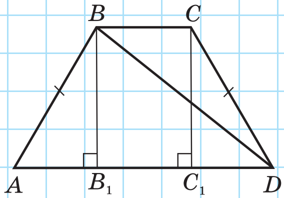


Рис. 10

Коло, описане навколо трапеції, є також описаним навколо трикутника ABD. За щойно доведеним $\frac{BD}{\sin A} = 2R$, отже, $R = \frac{BD}{2\sin A}$, $R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

Запитання і задачі

Усні вправи

61. За допомогою теореми синусів відновіть відношення синусів кутів трикутника ABC у правій частині рівності $BC : AC : AB = \ldots$.
62. Назвіть найбільшу та найменшу сторони трикутника ABC, якщо $\sin B > \sin A > \sin C$.
63. У трикутнику ABC $\sin A = \sin C$. Чи може один із кутів A і C бути тупим? Чи має даний трикутник рівні сторони?
64. У трикутнику ABC $AB = 6$, $BC = 3$. Чи може бути, що $\sin A = 1$?

Графічні вправи

65. Накресліть рівнобедрений трикутник із кутом при основі 30°. Виміряйте довжини сторін трикутника та обчисліть їх відношення до синусів протилежних кутів. Порівняйте отримані результати.
66. Накресліть коло радіуса 2 см і впишіть у нього трикутник із кутом 30°. Виміряйте сторону, протилежну до цього кута, і порівняйте її довжину з радіусом кола. Поясніть отриманий результат.

Письмові вправи

Рівень А

67. У трикутнику ABC знайдіть відношення сторін $AB : AC$ і $BC : AC$, якщо $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.
68. У трикутнику ABC знайдіть:
а) сторону BC, якщо $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle B = 105°$, $\angle C = 30°$;
б) кут A, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 45°$.
69. У трикутнику ABC знайдіть:
а) сторону AC, якщо $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 30°$, $\angle C = 45°$;
б) кут B, якщо $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 60°$.
70. У трикутнику MNK сторона MN удвічі менша, ніж NK, $\sin K = \frac{1}{4}$. Знайдіть кут M. Скільки розв'язків має задача?
71. У трикутнику MNK $\sin N : \sin K = 1 : 3$. Знайдіть сторону MN, якщо $MK = 3$ м.
72. За допомогою теореми синусів знайдіть відношення основи рівнобедреного прямокутного трикутника до бічної сторони.
73. За допомогою теореми синусів доведіть, що в прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Рівень Б

74. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AC знайдіть бісектрису BD, якщо $\angle C = 30°$, $CD = 8\sqrt{2}$ см.
75. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а висота AD дорівнює 6 м.
76. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 75°$, CD — бісектриса. Знайдіть AD, якщо $AC = 2\sqrt{3}$.
77. Одна зі сторін трикутника дорівнює a, а кути, прилеглі до цієї сторони, дорівнюють α і β. Знайдіть довжини бісектрис цих кутів.
78. Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть цю діагональ, якщо сторона, прилегла до кута α, дорівнює a.
79. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з кутом 120°, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.
80. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть кути трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см. Скільки розв'язків має задача?

Рівень В

81. Знайдіть довжини двох сторін трикутника, які лежать проти кутів 60° і 45°, якщо різниця цих довжин становить m.
82. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює P, а два кути α і β.
83. Коло, описане навколо трикутника, і коло, яке проходить через ортоцентр і дві вершини цього трикутника, мають рівні радіуси. Доведіть.
84. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- розв'язування прямокутних трикутників;
- означення тригонометричних функцій.

8 клас, § 19–21

9 клас, п. 1.1

Задачі

85. Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 і $4\sqrt{3}$.
86. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, CD — висота. Порівняйте відрізки AD і DB, якщо $\sin A < \sin B$.

§ 4 Розв'язування трикутників

4.1. Основні задачі на розв'язування трикутників

За допомогою теорем косинусів і синусів можна розв'язати довільний трикутник за трьома основними елементами, якщо хоча б один із них є стороною трикутника. Розглянемо чотири основні задачі на розв'язування трикутників.

Задача 1 (розв'язування трикутника за стороною та двома кутами)

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$ (рис. 11). Знайти: b, c, $\angle A$.

Розв'язання

1) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

2) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

звідки $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

Задача 2 (розв'язування трикутника за двома сторонами й кутом між ними)

Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$.

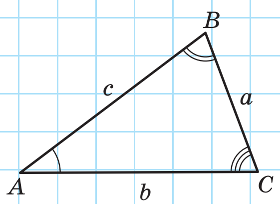


Рис. 11. До задач на розв'язування трикутників

Розв'язання

1) За теоремою косинусів $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.

2) За наслідком з теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут A.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.

Задача 3 (розв'язування трикутника за трьома сторонами)

Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Розв'язання

1) За наслідком з теореми косинусів $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут A.

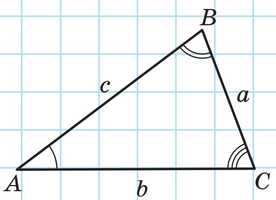
2) Аналогічно $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B.

3) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

Зауважимо, що для знаходження кутів у задачах 2 і 3 можна скористатися також теоремою синусів. Але при цьому слід пам’ятати, що будь-якому значенню $\sin A$, меншому від 1, відповідатимуть два кути — гострий і тупий. Щоб уникнути помилки, рекомендуємо позначити через a найменшу зі сторін. У такому випадку кут A, протилежний стороні a, обов’язково має бути гострим. Обґрунтуйте це самостійно.

Задача 4 (розв’язування трикутника за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них)



[Рис. 11]

Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$.

Розв’язання

1) За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$, звідки $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$.

За допомогою калькулятора або таблиць знаходимо кут B, враховуючи, що проти більшої сторони трикутника лежить більший кут (якщо $a > b$, то кут B гострий).

2) За теоремою про суму кутів трикутника $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.

3) За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$, звідки $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.

Задачу 4 можна розв’язати і в інший спосіб, склавши квадратне рівняння відносно змінної c на підставі теореми косинусів: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Це рівняння може мати один або два корені чи не мати жодного. Тому задача 4 залежно від значень a, b і $\angle A$ може мати один або два розв’язки чи не мати жодного.

Звернемо увагу, що задачі 1–3 завжди мають не більш ніж один розв’язок. Подумайте, як це пов’язане з ознаками рівності трикутників.

Домовимося під час розв’язування трикутників округляти довжини сторін до сотих, а градусні міри кутів — до одиниць.

4.2. *Застосування розв'язування трикутників у задачах*

Щойно розглянуті задачі на розв'язування трикутників часто є окремими фрагментами складніших геометричних задач. У цих випадках варто дотримуватись такого плану.

1. **Визначити елемент даної фігури (відрізок або кут), який необхідно знайти.**
2. **Виділити на рисунку допоміжний трикутник, який містить шуканий елемент і може бути розв'язаний за наявними даними задачі.**
   Якщо на рисунку такого трикутника немає, його можна отримати, провівши додаткові побудови. Іноді для пошуку необхідного відрізка або кута треба послідовно розв'язати декілька допоміжних трикутників зі спільними елементами.
3. **Розв'язавши допоміжний трикутник (або трикутники), знайти шуканий елемент і використати його для подальшого розв'язування початкової задачі.**

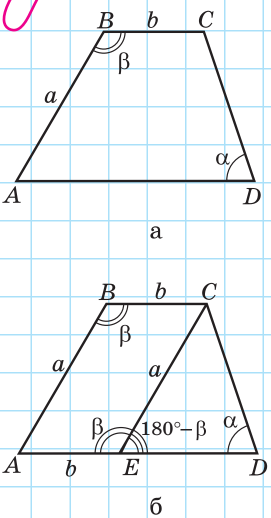


Рис. 12

Задача

За даними рис. 12, *а* знайдіть середню лінію трапеції *ABCD*.

Розв'язання

Нехай у трапеції *ABCD* $AD \parallel BC$, $AB = a$, $BC = b$, $\angle B = \beta$, $\angle D = \alpha$ (рис. 12, *а*). Знайдемо середню лінію трапеції.

Проведемо через вершину *C* пряму, паралельну стороні *AB*. Нехай вона перетинає основу *AD* в точці *E* (рис. 12, б). Тоді *ABCE* — паралелограм, $CE = AB = a$, $AE = BC = b$, $\angle AEC = \angle B = \beta$. Звідси в трикутнику *ECD* $\angle CED = 180° - \beta$ як суміжний із кутом β паралелограма. Із трикутника *ECD* за теоремою синусів $\frac{EC}{\sin D} = \frac{ED}{\sin \angle ECD}$, тобто $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{ED}{\sin(\beta - \alpha)}$.

Звідси $ED = \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Тоді в даній трапеції $AD = b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$. Оскільки середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, то вона має довжину $\frac{1}{2}\left(b + b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right)$, тобто $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Відповідь: $b + \frac{a\sin(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}$.

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування теореми синусів, провівши висоти трапеції з вершин B і C. Спробуйте самостійно розв'язати задачу цим способом і зробити висновок про те, який зі способів є зручнішим.

Розв'язування трикутників широко застосовується на практиці, зокрема під час проведення вимірювань на місцевості. Нехай, наприклад, необхідно виміряти відстань від точки A до певної недосяжної точки B (рис. 13). Оберемо на місцевості точку C, прохід від якої до точки A можливий, і виміряємо відстань AC. Потім за допомогою спеціальних приладів для вимірювання кутів на місцевості визначимо градусні міри кутів BAC і BCA. Отже, нехай $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Ці дані дозволяють знайти шукану відстань AB (див. задачу 1, п. 4.1).

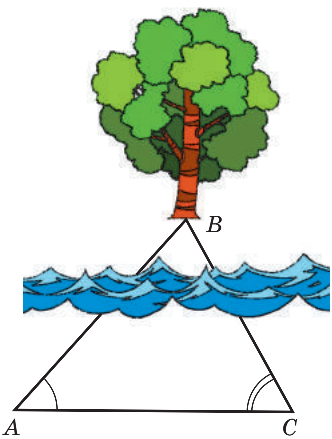


Рис. 13

За теоремою про суму кутів трикутника

$$\angle B = 180° - (\alpha + \gamma);$$

за теоремою синусів $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, тобто

$$\frac{b}{\sin(180° - (\alpha+\gamma))} = \frac{AB}{\sin\gamma},$$

звідки $AB = \frac{b\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

Запитання і задачі

Усні вправи

87. За якою теоремою можна знайти невідому сторону трикутника, в якому задано:
а) дві сторони й кут між ними;
б) дві сторони й кут, протилежний одній із них;
в) сторону й прилеглі до неї кути?

88. Чи можна знайти:
а) кути трикутника, в якому задано три сторони;
б) сторони трикутника, в якому задано три кути?

89. Скільки розв’язків може мати задача на розв’язування трикутника:
а) за трьома сторонами;
б) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них;
в) за стороною та двома кутами?

Графічні вправи

90. Накресліть трикутник ABC, у якому $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 60°$. Знайдіть на стороні AC точку C_1 таку, щоб трикутники ABC і ABC_1 були двома розв’язками задачі на розв’язування трикутника за двома сторонами й кутом $20°$, протилежним одній із них. Сполучіть точки B і C_1 та виміряйте кут AC_1B.

91. Накресліть трикутник зі стороною 4 см і прилеглими до неї кутами $45°$ і $60°$. Обчисліть довжини сторін трикутника, протилежних заданим кутам. Перевірте отримані результати вимірюванням.

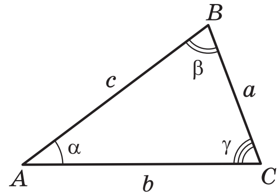
Письмові вправи

Рівень А

92. Розв’яжіть рівнобедрений трикутник за основою 6 см і кутом при основі $15°$.

93. Розв’яжіть трикутник за стороною 10 см і прилеглими до неї кутами $30°$ і $60°$.

94. Розв’яжіть трикутник (див. рис. 11) за стороною та двома кутами:
а) $a = 10$, $\beta = 45°$, $\gamma = 30°$;
б) $b = 6$, $\alpha = 100°$, $\beta = 50°$.



[Рис. 11]

95. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом між ними:

а) $a = 5$, $b = 21$, $\gamma = 60°$; б) $b = 7$, $c = 8$, $\alpha = 120°$.

96. Дороги між селищами Липове, Веселе і Семенівка вирішили заасфальтувати. Відстань між Липовим і Веселим дорівнює 1 км, між Веселим і Семенівкою — 4,2 км, а відрізок дороги між Липовим і Семенівкою видно з Веселого під кутом 60°. Бригада ремонтників асфальтує за день 0,5 км дороги. Чи встигнуть ремонтники впоратися до приїзду комісії, якщо роботи розпочато 21 червня, а комісія приїздить 10 липня?

97. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 12$, $\alpha = 40°$, $\beta = 64°$; б) $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $\gamma = 135°$.

98. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за трьома сторонами:

а) $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2$, $c = 7$; б) $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$.

99. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11) за двома сторонами й кутом, протилежним одній із них:

а) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
б) $b = 2$, $c = 10$, $\beta = 6°$;
в) $a = 1$, $c = 2$, $\alpha = 45°$.

100. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $a = 5$, $b = 21$, $c = 19$; б) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 22°$.

Рівень Б

101. Розв'яжіть трикутник* (див. рис. 11), якщо:

а) $c = 3$, $\gamma = 30°$, $h_b = 2$; б) $a = 17$, $b = 5\sqrt{2}$, $h_a = 5$.

102. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $BC = 2$ см, AD — бісектриса. Розв'яжіть трикутник ABD.

---

* Тут і далі медіану, бісектрису й висоту трикутника, проведені до сторони a, позначатимемо m_a, l_a і h_a відповідно.

103. Який вид (за величиною кутів) може мати трикутник ABC, якщо:

а) $BC = 8$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 60°$;

б) $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$;

в) $BC = 8$ см, $AC = 9$ см, $\angle A = 60°$?

104. За даними рис. 14 знайдіть AD.

105. За даними рис. 15 знайдіть $\sin D$.

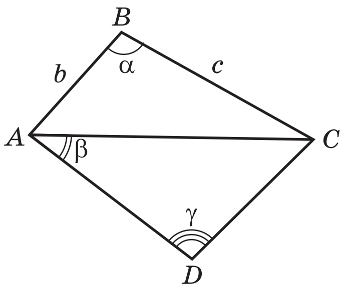


Рис. 14

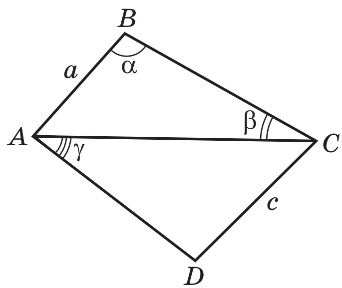


Рис. 15

106. На горі, схил якої знижується під кутом α до горизонту, росте дерево (рис. 16). Його тінь завдовжки l падає вниз по схилу при куті сонця над горизонтом β. Знайдіть висоту дерева.

107. Вершину пагорба з точки A видно під кутом α, а в разі наближення до пагорба на відстань a — під кутом β (рис. 17). Знайдіть висоту пагорба.

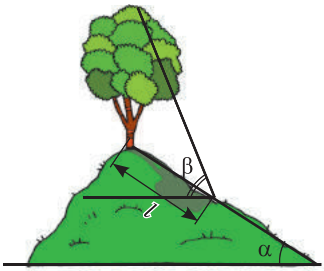


Рис. 16

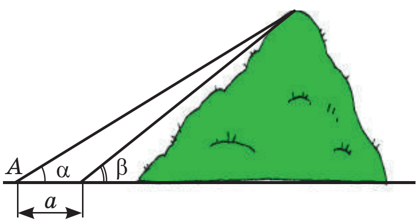


Рис. 17

108. Спостережна вежа заввишки 100 м розташована на горі (рис. 18). Об'єкт спостереження A видно з вершини вежі під кутом 60°, а від основи вежі — під кутом 30° до горизонту. Знайдіть висоту гори.

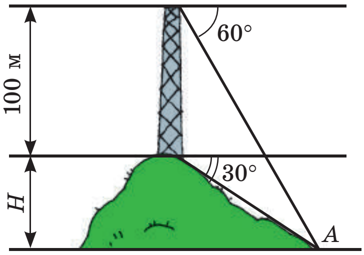


Рис. 18

109. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть периметр трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 110°. Відповідь округліть до сантиметрів.

110. Більша основа й бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см, а діагональ трапеції утворює з основою кут 50°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Рівень В

111. Дослідіть залежність кількості розв'язків задачі розв'язування трикутника за двома сторонами a і b та кутом α, протилежним одній із них, від значень a, b і α.

112. Розв'яжіть трикутник (див. рис. 11), якщо:

а) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $a + b = 24{,}14$;

б) $b = 9$, $c = 19$, $m_a = 11$.

113. Знайдіть сторони трикутника (див. рис. 11), якщо:

а) $\alpha = 47°$, $\beta = 120°$, $a - c = 11$;

б) $m_a = 12$, $m_b = 15$, $m_c = 9$.

114. За даними рис. 19 знайдіть сторони трикутника AOB.

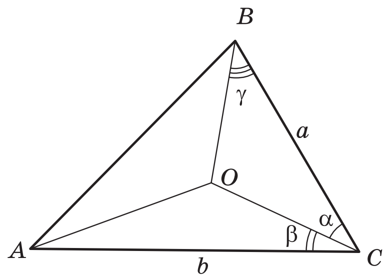


Рис. 19

115. Сторони a і b трикутника утворюють кут 120°. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини цього кута.

Повторення перед вивченням § 5

Теоретичний матеріал

- площа паралелограма; 8 клас, п. 16.3
- площа трикутника; 8 клас, п. 17.1
- вписане й описане кола трикутника. 7 клас, § 23

Задачі

116. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а кут між ними $30°$. Знайдіть площу трикутника.

117. Знайдіть площу паралелограма з висотами $6\sqrt{2}$ см і 8 см та гострим кутом $45°$.

§ 5 Формули для знаходження площі трикутника

5.1. Формула площі трикутника та наслідки з неї

Досі у формулах площ многокутників використовувалися лише довжини їхніх лінійних елементів (сторін, висот, діагоналей). Тригонометричні функції дозволяють залучити для знаходження площі многокутника величини його кутів.

Теорема (формула обчислення площі трикутника за двома сторонами й кутом між ними)

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

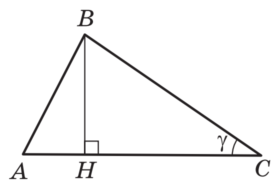
де a і b — сторони трикутника, γ — кут між ними.

Доведення

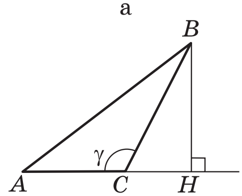
□ Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle C = \gamma$. Проведемо висоту BH. За відомою формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. Однак із прямокутного трикутника BCH ($\angle H = 90°$) маємо $BH = BC \sin\angle BCH$. При цьому у випадку, коли кут γ гострий (рис. 20, *а*), $\angle BCH = \gamma$, а коли кут γ тупий (рис. 20, *б*), $\angle BCH = 180° - \gamma$, $\sin\angle BCH = \sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$. Отже, $BH = BC \sin\gamma$. Тоді

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Випадок, коли кут γ прямий, розгляньте самостійно. ■



а



б

Рис. 20. До доведення формули площі трикутника

Наслідок

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = ab\sin\gamma,$$

де a і b — сторони паралелограма, γ — кут між ними.

Задача

Знайдіть найменшу сторону трикутника, площа якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см^2, найбільша сторона — 8 см, а один із кутів — 30°.

Розв'язання

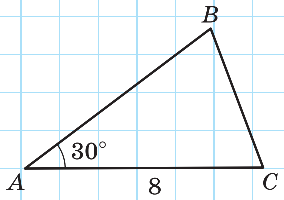


Рис. 21

Нехай дано трикутник ABC, $AC = 8$ см, $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$ см^2 (рис. 21). Із теореми про суму кутів трикутника випливає, що кут 30° не може бути найбільшим кутом, отже, він не є протилежним даній стороні.

Нехай $\angle A = 30°$. За формулою площі трикутника

$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$, тобто $8\sqrt{3} = \frac{1}{2}AB \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, звідки $AB = 4\sqrt{3}$ (см).

За теоремою косинусів $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$,

$BC^2 = 48 + 64 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $BC = 4$ (см).

Отже, BC — найменша сторона даного трикутника.

Відповідь: 4 см.

Формула площі трикутника застосовується і для доведення формули площі чотирикутника із заданими діагоналями й кутом між ними.

Опорна задача
(формула площі чотирикутника)

Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma,$$

де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника, γ — кут між ними.

Доведіть.

Розв'язання

Нехай діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O під кутом γ (рис. 22). Площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі площ чотирьох трикутників:

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\gamma,$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin(180^\circ-\gamma),$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\gamma,$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin(180^\circ-\gamma).$$

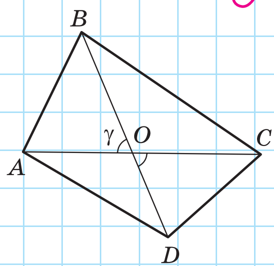


Рис. 22. До доведення формули площі чотирикутника

Враховуючи, що $\sin(180^\circ-\gamma)=\sin\gamma$, маємо:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sin\gamma(BO\cdot(AO+OC)+OD\cdot(AO+OC))=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\gamma\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma.$$

Наслідок

Площа прямокутника обчислюється за формулою $S=\frac{1}{2}d^2\sin\gamma$, де d — діагональ прямокутника, γ — кут між діагоналями. Зокрема, площа квадрата з діагоналлю d обчислюється за формулою $S=\frac{d^2}{2}$.

Нагадаємо також, що площа ромба з діагоналями d_1 і d_2 обчислюється за формулою $S=\frac{d_1d_2}{2}$.

5.2. Формула Герона

Ще одна формула площі трикутника, для доведення якої можна використати тригонометричні функції, була запропонована давньогрецьким математиком Героном Александрійським і отримала його ім'я. Тільки у XX ст. з'ясувалося, що раніше за Герона цю формулу винайшов Архімед.

Теорема (формула Герона)

Площа трикутника обчислюється за формулою

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ — його півпериметр.

Дано: a, b, c — сторони трикутника.

Довести: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

Доведення

□ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$; $\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (за наслідком з теореми косинусів).

З основної тригонометричної тотожності маємо:

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$

$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Оскільки $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, то $a+b+c=2p$, $c-a+b=2p-2a$, $c+a-b=2p-2b$, $a+b-c=2p-2c$. Тоді $\sin^2\gamma=\dfrac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2b^2}$, $\sin\gamma=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}$.

Підставивши одержаний вираз у формулу $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$, отримаємо: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, що й треба було довести. ■

Задача

Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами завдовжки 12, 39 і 45.

Розв'язання

Оскільки найбільша висота трикутника перпендикулярна до його найменшої сторони, знайдемо висоту, проведену до сторони $a=12$. Скористаємось методом площ. За формулою Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

У нашому випадку $p=\frac{12+39+45}{2}=48$,

$S=\sqrt{48(48-12)(48-39)(48-45)}=216$.

З іншого боку, $S=\frac{1}{2}ah_a$, тобто $216=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot h_a$, звідки $h_a=36$.

Відповідь: 36.

5.3. Формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника

Теорема (формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника)

Для радіусів вписаного й описаного кіл трикутника справджуються формули

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c},\quad R=\frac{abc}{4S},$$

де r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, S — площа трикутника, a, b, c — сторони трикутника, $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Доведення

□ Доведемо спочатку формулу для обчислення r. Нехай у трикутнику ABC зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ точка O — центр вписаного кола (рис. 23). Тоді площа цього трикутника дорівнює сумі площ трикутників BOC, AOC і AOB:

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr.$$

Звідси $r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{a+b+c}$.

Щоб довести формулу для R, скористаємось повним формулюванням теореми синусів, згідно з яким $\frac{a}{\sin A}=2R$, звідки $R=\frac{a}{2\sin A}$. Оскільки

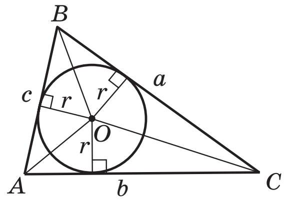


Рис. 23. До доведення формули радіуса вписаного кола

$S=\frac{1}{2}bc\sin A$, то $\sin A=\frac{2S}{bc}$. Підставивши цей вираз у формулу для R, маємо: $R=\frac{abc}{4S}$. Теорему доведено. ■

Нагадаємо:

1) для прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c часто застосовують раніше отримані формули $r=\frac{a+b-c}{2}$ і $R=\frac{c}{2}$;
2) центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис трикутника; центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника;
3) для обчислення радіуса описаного кола в трикутнику зі стороною a і протилежним кутом α можна скористатися формулою $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$.

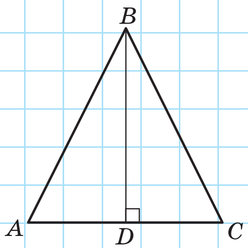


Рис. 24

Задача

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а проведена до неї висота — 32 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $AB=BC$, $AC=48$ см, $BD=32$ см — висота (рис. 24). Оскільки висота BD є також медіаною трикутника ABC, то $AD=DC=24$ см.

Із трикутника ABD ($\angle D=90°$) за теоремою Піфагора $AB=\sqrt{24^2+32^2}=40$ (см).

За формулою радіуса описаного кола

$$R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{AB^2\cdot AC}{4\cdot 0{,}5AC\cdot BD}=\frac{AB^2}{2BD},\quad R=\frac{40^2}{2\cdot 32}=25 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 25 см.

Зазначимо, що цю задачу можна розв'язати і без застосування формули радіуса описаного кола. Але такий спосіб може виявитися більш складним, особливо тоді, коли він потребує обґрунтування розміщення центра описаного кола в даному трикутнику.

Запитання і задачі

Усні вправи

118. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Чи може площа цього трикутника дорівнювати 10 см^2; 15 см^2; 30 см^2?

119. Серед усіх паралелограмів із заданими сторонами a і b визначте той, площа якого є найбільшою. Відповідь обґрунтуйте.

120. Два трикутники описані навколо одного кола. Відомо, що периметр першого трикутника менший, ніж периметр другого. Який із цих трикутників має більшу площу?

Графічні вправи

121. Накресліть паралелограм із кутом 30° і виміряйте довжини його сторін.
   а) Обчисліть площу побудованого паралелограма.
   б) Накресліть прямокутник, сторони якого дорівнюють сторонам побудованого паралелограма. У скільки разів площа прямокутника більша за площу паралелограма?

122. Накресліть гострокутний трикутник, площа якого дорівнює 12 см^2. Накресліть тупокутний трикутник, рівновеликий побудованому гострокутному, так, щоб побудовані трикутники мали спільну сторону.

Письмові вправи

Рівень А

123. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:
   а) $AB = 10,\ BC = 12,\ \angle B = 30°$;
   б) $AB = AC = 6,\ \angle A = 120°$;
   в) $AC = 5\sqrt{2},\ BC = 8,\ \angle A = 100°,\ \angle B = 35°$.

124. Знайдіть площу:
   а) прямокутного трикутника з катетом $6\sqrt{3}$ см і прилеглим кутом 60°;
   б) паралелограма зі сторонами 4 см і $4\sqrt{3}$ см та кутом 60°;
   в) прямокутника з діагоналлю 12 см і кутом між діагоналями 30°.

125. Знайдіть площу:
а) рівнобедреного трикутника з бічною стороною 10 см і кутом при основі 75°;
б) ромба з периметром $16\sqrt{2}$ см і кутом 135°;
в) квадрата з діагоналлю 6 см.

126. Площа трикутника ABC дорівнює 20 см^2. Знайдіть сторону BC, якщо $AC = 5\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$.

127. Знайдіть кути паралелограма зі сторонами 3 см і 12 см, якщо його площа дорівнює 18 см^2.

128. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 36 м^2.

129. Знайдіть площу трикутника зі сторонами:
а) 13, 14 і 15;
б) 15, 26 і 37;
в) 8, 29 і 35;
г) 17, 25 і 26.

130. Сторони паралелограма дорівнюють 25 см і 29 см, а одна з діагоналей — 36 см. Знайдіть площу паралелограма.

131. Знайдіть площу трикутника зі сторонами 5, 5 і 6 двома способами.

132. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл:
а) рівнобедреного трикутника з основою 12 см, якщо медіана, проведена до основи, дорівнює 8 см;
б) трикутника зі сторонами 7 см, 15 см і 20 см.

133. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 16, 25 і 39.

Рівень Б

134. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:
а) $\angle A = \alpha$, а висоти, проведені з вершин B і C, відповідно дорівнюють h_b і h_c;
б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а висота, проведена з вершини B, дорівнює h_b.

135. Знайдіть площу:
а) рівнобедреного трикутника з основою $8\sqrt{3}$ см, найменший зовнішній кут якого дорівнює 60°;
б) паралелограма з кутом 30°, якщо бісектриса цього кута ділить сторону на відрізки завдовжки 11 см і 5 см починаючи від вершини протилежного кута;
в) прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 75°.

136. Знайдіть площу:
а) ромба з периметром 80 см і відношенням кутів $1:5$;
б) трикутника зі сторонами $6\sqrt{3}$ см, 4 см і 14 см.

137. Знайдіть периметр трикутника з площею $6\sqrt{3}$ см^2 і кутом 60°, якщо сторони, прилеглі до даного кута, відносяться як $3:8$.

138. Площа прямокутника з діагоналлю 6 см дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

139. Чи може у формулі Герона хоча б одна з різниць $p-a$, $p-b$ або $p-c$ бути від'ємною? Відповідь обґрунтуйте.

140. Знайдіть найбільшу висоту й радіус вписаного кола для трикутника зі сторонами:
а) 4, 13 і 15; б) 9, 10 і 17; в) 16, 25 і 39.

141. Знайдіть найменшу висоту й радіус описаного кола для трикутника зі сторонами:
а) 10, 17 і 21; б) 20, 34 і 42.

142 (опорна). *Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус вписаного кола.* Доведіть.

143. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а бічна сторона відноситься до основи як $5:6$. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

144. Висота трикутника дорівнює 12 см і ділить його сторону на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника.

Рівень В

145. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 11 см, а діагоналі — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

146. Паралельні сторони трапеції дорівнюють 2 см і 6 см, а непаралельні — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

147. Точка дотику вписаного кола ділить бічну сторону рівнобічної трапеції на відрізки завдовжки 9 см і 16 см. Знайдіть радіус кола і площу трапеції.

148. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, у якій бічна сторона дорівнює 40 см, основа — 13 см, а діагональ — 51 см.

Повторення перед вивченням § 6

Теоретичний матеріал

- теорема Фалеса; середні лінії трикутника і трапеції;
- теорема Піфагора.

8 клас, § 6

8 клас, § 13

Задачі

149. У мотузковому містечку дві точки маршруту, що розташовані на висоті 5,6 м і 2 м, з'єднані прямим містком. Знайдіть відстань від середини цього містка до землі.

150. Відрізки $AA_1 = 10$ см і $BB_1 = 28$ см — відстані від точок A і B до прямої l (точки A і B лежать по один бік від прямої). Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $A_1B_1 = 24$ см.

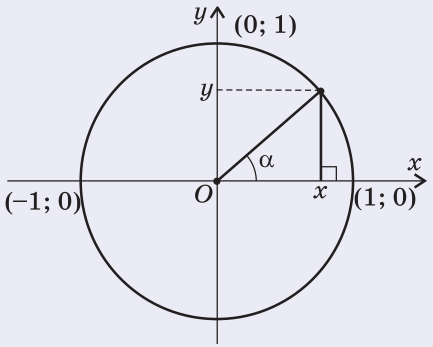
Задачі для підготовки до контрольної роботи № 1

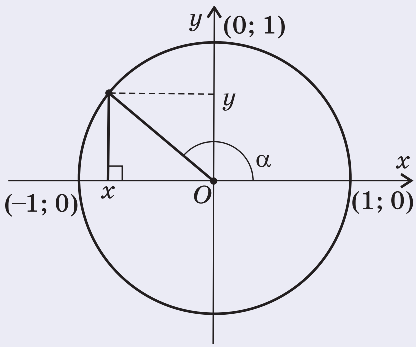
1. У трикутнику ABC $AB = 8$ м, $BC = 15$ м, $\angle B = 60°$. Знайдіть периметр і площу трикутника.
2. У трикутнику DEF $DE = 4$ см, $\angle D = 30°$, $\angle E = 120°$. Знайдіть невідомі сторони трикутника і радіус кола, описаного навколо нього.
3. Дано трикутник зі сторонами 13, 20 і 21.
   а) Доведіть, що даний трикутник гострокутний.
   б) Знайдіть площу трикутника.
   в) Знайдіть найменшу висоту трикутника.
4. Сторони паралелограма дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 2 см та утворюють кут 45°. Знайдіть меншу діагональ і площу паралелограма.
5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а проведена до неї висота — 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.
6. Діагональ, бічна сторона і більша основа рівнобічної трапеції дорівнюють відповідно 40 см, 13 см і 51 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Онлайн-тестування

Підсумки розділу І

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ





$\sin\alpha = y$

$\cos\alpha = x$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ І ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 (\alpha \neq 0°, \alpha \neq 90°, \alpha \neq 180°)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\alpha \neq 90°)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$$

Формули зведення

Для $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

Для $0° < \alpha < 90°$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Для $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

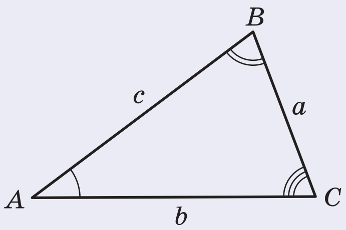
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\alpha \neq 90°)$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°)$

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ ТА НАСЛІДКИ З НЕЇ

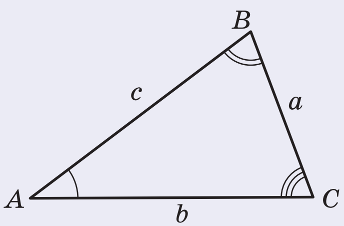


Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Наслідок 1	Наслідок 2
У трикутнику ABC зі сторонами a, b, c і кутом C між сторонами a і b $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	Якщо в трикутнику зі сторонами a, b, c справджується нерівність $a^2+b^2>c^2$, то кут C гострий; якщо $a^2+b^2<c^2$, то кут C тупий; якщо $a^2+b^2=c^2$, то кут C прямий

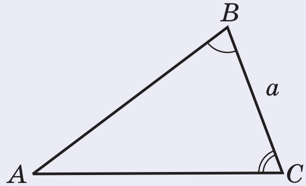
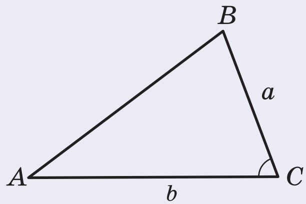
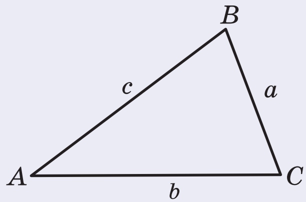
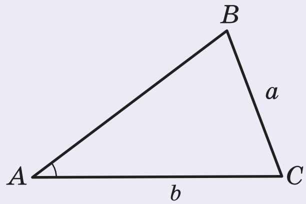
ТЕОРЕМА СИНУСІВ



Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

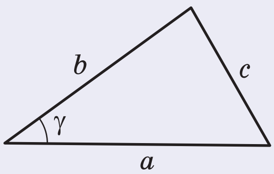
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ		
Задача	Умова	Схема розв'язування
Задача 1 За стороною та двома кутами	Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Знайти: b, c, $\angle A$ 	1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$. 2. $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$
Задача 2 За двома сторонами й кутом між ними	Дано: a, b, $\angle C$. Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$ 	1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$. 2. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$
Задача 3 За трьома сторонами	Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 	1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$
Задача 4 За двома сторонами й кутом, протилежним одній із них	Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$ 	1. $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$

ФОРМУЛИ ПЛОЩ

Площа трикутника



$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

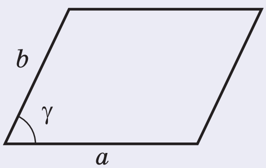
де a і b — сторони трикутника,
γ — кут між ними

Формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — сторони трикутника,
$p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр

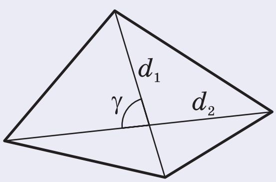
Площа паралелограма



$$S=ab\sin\gamma,$$

де a і b — сторони паралелограма,
γ — кут між ними

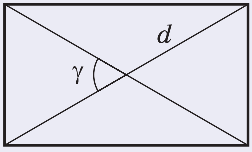
Площа опуклого чотирикутника



$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma,$$

де d_1, d_2 — діагоналі чотирикутника,
γ — кут між ними

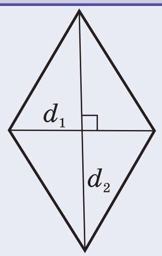
Площа прямокутника



$$S=\frac{d^2}{2}\sin\gamma,$$

де d — діагональ прямокутника,
γ — кут між діагоналями

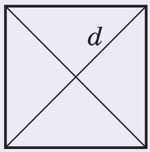
ФОРМУЛИ ПЛОЩ



Площа ромба

$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$

де d_1 і d_1 — діагоналі ромба

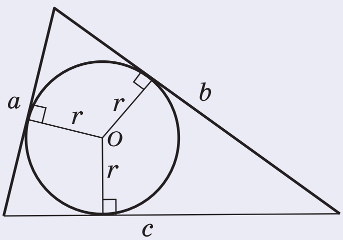


Площа квадрата

$$S = \frac{d^2}{2},$$

де d — діагональ квадрата

ФОРМУЛИ РАДІУСІВ



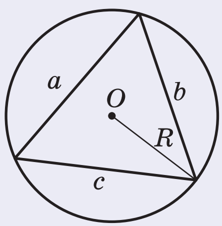
Радіус вписаного кола трикутника

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c},$$

де S — площа трикутника,

a, b, c — сторони трикутника,

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр



Радіус описаного кола трикутника

$$R = \frac{abc}{4S},$$

де S — площа трикутника,

a, b, c — сторони трикутника

Контрольні запитання до розділу I

1. Дайте означення синуса, косинуса й тангенса кутів від 0° до 180°.
2. Запишіть формули зведення для кутів $(90° - \alpha)$ і $(180° - \alpha)$.
3. Сформулюйте теорему косинусів.
4. Сформулюйте наслідки з теореми косинусів.
5. Сформулюйте теорему синусів.
6. Опишіть основні алгоритми розв'язування трикутників.
7. Запишіть формули площі довільного трикутника.
8. Запишіть формули радіусів вписаного й описаного кіл трикутника.

Додаткові задачі до розділу I

151. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

152. Знайдіть діагоналі паралелограма, площа якого дорівнює $14\sqrt{3}$ м^2, а сторони — 4 м і 7 м.

153. Точка D лежить на основі AC рівнобедреного трикутника ABC. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABD і DBC, рівні.

154. Доведіть теорему синусів методом площ.

155. Доведіть за допомогою теореми синусів теорему про властивість бісектриси трикутника.

156. Розв'яжіть трикутник ABC, якщо $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R.

157 (опорна). *Якщо два трикутники мають по рівному куту, то відношення площ цих трикутників дорівнює відношенню добутків сторін, що утворюють рівні кути.* Доведіть.

158. Знайдіть площу трикутника, в якому бісектриса кута, що дорівнює 120°, ділить протилежну сторону на відрізки 21 см і 35 см.

159. Дві сторони трикутника дорівнюють $8\sqrt{2}$ см і 7 см, а його площа — 28 см^2. Знайдіть третю сторону.

160. До якої з вершин різностороннього трикутника центр вписаного кола є найближчим? Відповідь обґрунтуйте.

161. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 192 см^2, а радіус вписаного кола — 6 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його основа на 4 см більша за бічну сторону.

162. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона — 26 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Задачі підвищеної складності

163. Медіани AN і BM трикутника ABC перетинаються в точці O, $AN = 6$, $BM = 9$, $\angle AOB = 30°$. Знайдіть площу трикутника ABC.

164. У трикутнику ABC $\angle A = 75°$, $AB = 1$, $AC = \sqrt{6}$. На стороні BC позначено точку M так, що $\angle BAM = 30°$. Пряма AM перетинає коло, описане навколо трикутника ABC, в точці N, яка не збігається з точкою A. Знайдіть AN.

165 (опорна). *Якщо у трикутнику зі сторонами* a, b, c *і кутом* α *між сторонами* b *і* c *до сторони* a *проведена бісектриса* l_a, *то* $l_a = \dfrac{2bc\cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$. Доведіть.

166. У трикутнику зі стороною 26 см медіани, проведені до двох інших сторін, дорівнюють 15 см і 30 см. Знайдіть довжину третьої медіани.

167. Сторони опуклого чотирикутника з площею S дорівнюють a, b, c і d. Доведіть, що $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$.

168. Доведіть формулу площі вписаного чотирикутника (формулу Брахмагупти) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де a, b, c і d — сторони чотирикутника, p — його півпериметр.

169. Доведіть, що для висот трикутника h_a, h_b і h_c та радіуса вписаного кола r справджується співвідношення $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

170. Центр вписаного в прямокутний трикутник кола віддалений від кінців гіпотенузи на 7 см і $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус вписаного кола.

171. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють a і b. Бісектриси кутів при третій стороні в результаті перетину утворюють кут 165°. Знайдіть площу трикутника.

172. У трапеції з основами a і b ($a < b$) діагоналі взаємно перпендикулярні, а кут між продовженнями бічних сторін дорівнює 45°. Знайдіть висоту трапеції.

Історична довідка

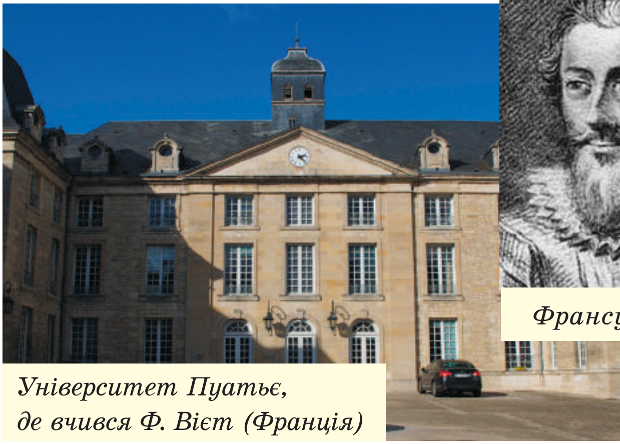
Приблизно до XVII ст. тригонометрія як розділ геометрії вивчала майже виключно одне питання — розв'язування трикутників. І це не дивно, адже потреби архітектури й астрономії, геодезії і мореплавання висували проблему пошуку невідомих сторін і кутів трикутника на чільне місце в процесі розв'язування практичних задач.

Гімназія (палестра) в Олімпії (Давня Греція)

Теорему косинусів фактично було доведено вже в другій книзі «Начал» Евкліда, де узагальнюється теорема Піфагора і наводяться формули для обчислення квадрата сторони довільного трикутника. Математики Александрії, Давньої Індії, країн Близького та Середнього Сходу також використовували подібні формули. Однак уперше чітке формулювання теореми косинусів навів у 1579 р. французький математик Франсуа Вієт (1540–1603). Сучасного вигляду ця теорема набула в 1801 р. у роботі іншого французького вченого — Лазара Карно (1753–1823).

Значно пізніше за теорему косинусів було винайдено теорему синусів. Річ у тім, що математики давнини зводили розв'язування довільних трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, тому теорема синусів їм не була потрібна. Цю теорему довів лише в XI ст. астроном із Хорезма Аль-Біруні. Починаючи з XVI ст. теорему синусів використовують і європейські геометри, а в 1801 р. французький математик Ж. Л. Лагранж (1736–1813) вивів її з теореми косинусів.

Розкопки Мохенджо-Даро (Давня Індія)



Університет Пуатьє, де вчився Ф. Вієт (Франція)

Франсуа Вієт

Ж. Л. Лагранж

Цікавою є історія виникнення формули Герона. Про життя й діяльність Герона Александрійського відомо вкрай мало — навіть роки його життя достеменно не встановлено (одні історики вважають, що він жив у III ст. до н. е., другі — у I ст. до н. е., треті — у I ст. н. е.). Герон досяг визначних результатів у прикладних науках — геодезії та механіці (його навіть називали Герон-механік). Він виклав правила вимірювання земельних ділянок і описав деякі вимірювальні прилади, зокрема «діоптри» — прилади для побудови й вимірювання кутів на місцевості. У своєму найважливішому геометричному творі «Метрика» Герон навів доведення формули площі трикутника, нині відомої як формула Герона. Але пізніше з'ясувалося, що першим цю формулу в III ст. до н. е. вивів славнозвісний Архімед.

Герон

Римській амфітеатр (Александрія, Єгипет)

Математичні олімпіади

Українські учнівські математичні олімпіади

Для тих, хто захоплюється математикою і завжди прагне проявити себе в розв'язуванні нестандартних задач, матеріалів будь-якого підручника буде замало. Тому вже понад 130 років у світі проводяться різноманітні математичні змагання. Найбільш поширеними з них є учнівські математичні олімпіади.

У 1884 році в Києві почав виходити «Журнал елементарної математики», в якому школярам пропонувалися задачі для самостійного розв'язування. Це була фактично перша заочна математична олімпіада на теренах України.

У 1935 році вперше було проведено очну міську олімпіаду з математики в Києві. Її фундатором став професор, дійсний член Всеукраїнської академії наук Михайло Пилипович Кравчук, у числі організаторів була також Клавдія Яківна Латишева. Зазначимо, що К. Я. Латишева стала першою в Україні жінкою, яка захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук, а потім — докторську дисертацію та отримала звання професора. У серпні 2021 року Укрпошта випустила марки, на яких зображені жінки, що досягли вагомих здобутків у ІТ, фізиці чи математиці. Одна із цих жінок — К. Я. Латишева. У 1936 році у Київській міській олімпіаді взяли участь також діти з інших міст України. Серед переможців був харківський школяр, майбутній академік Олексій Погорєлов. Після того як у 1938 році М. П. Кравчука було репресовано, організацією учнівських олімпіад активно опікувався майбутній академік, а в ті часи професор Київського університету М. М. Боголюбов. Після війни він доклав значних зусиль до відновлення Київських олімпіад з математики. Слід відзначити також вагомий внесок у цю справу Любові Миколаївни Граціанської, яка присвятила себе історії математики. Цікаво, що у 1950 році друге місце в Київській міській олімпіаді посів запрошений до участі в ній учень ніжинської

школи Михайло Ядренко, у майбутньому видатний учений і педагог. З 1961 року стали проводитися традиційні щорічні Всеукраїнські олімпіади з математики. У них беруть участь талановиті діти з усіх куточків України. У 1968 році Михайло Йосипович Ядренко, який у той час уже очолював кафедру Київського університету, заснував періодичне видання «У світі математики», а починаючи з 1970 року він понад 30 років був головою журі Всеукраїнських учнівських олімпіад.

Задачі математичних олімпіад завжди були надзвичайно цікавим джерелом нестандартних ідей. Зокрема, традиційно пропонується багато олімпіадних завдань з геометрії. І всі ви можете спробувати отримати насолоду в пошуках свого, оригінального розв'язання олімпіадної задачі.

Розглянемо, наприклад, задачу І Всеукраїнської олімпіади з математики. *У даний рівносторонній трикутник вписати рівносторонній трикутник найменшої площі.* Розглянемо розв'язання цієї задачі, засноване на методах і формулах розділу, який ви щойно опанували.

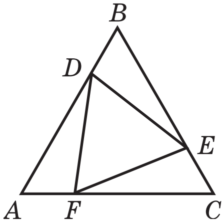


Рис. 25

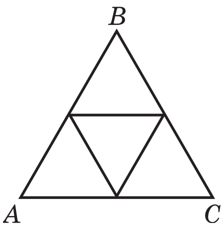


Рис. 26

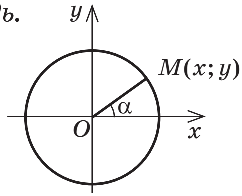
Розв'язання. Нехай дано рівносторонній трикутник ABC зі стороною a і вписаний у нього рівносторонній трикутник DEF (рис. 25). Очевидно, що трикутники ADF, BED і CFE є рівними (доведіть це самостійно). Площа трикутника DEF буде дорівнювати різниці площі трикутника ABC і площ цих трикутників. Нехай $AD = x$, тоді $S_{DEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}x(a-x)\sin 60°\right)$. Отже, S_{DEF} буде найменшою, коли значення виразу $x(a-x)$ буде найбільшим. А оскільки $x(a-x) = -\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$, то добуток $x(a-x)$ набуде найбільшого значення, якщо $x = \frac{a}{2}$. Звідси шуканим є трикутник, утворений середніми лініями трикутника ABC (рис. 26).

Поверніться до розв'язання цієї задачі після опанування методів наступних розділів підручника та спробуйте розв'язати її в інший спосіб.

Готуємось до ДПА

Тест 1

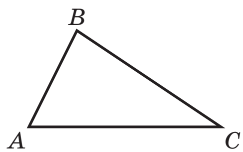
Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.



1. На тригонометричному колі точка $M(x;\ y)$ відповідає куту α (див. рисунок). Укажіть функцію кута α, значення якої дорівнює y.

   А $\sin\alpha$ Б $\cos\alpha$ В $\mathrm{tg}\,\alpha$ Г $\mathrm{ctg}\,\alpha$

2. Серед наведених співвідношень між сторонами та кутами трикутника ABC (див. рисунок) укажіть правильне.



   А $\dfrac{AB}{\cos C}=\dfrac{BC}{\cos A}$

   Б $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$

   В $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\sin B$

   Г $BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$

3. Визначте вид кута α $(0°<\alpha\leqslant 180°)$, якщо $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha=0$.

   А Гострий Б Прямий В Тупий Г Розгорнутий

4. Спростіть вираз $1-\sin(180°-\alpha)\sin\alpha$.

   А $1+\sin^2\alpha$ Б $1-\cos\alpha\sin\alpha$ В $\cos^2\alpha$ Г $\sin^2\alpha$

5. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і основою 8 см.

   А $1\frac{1}{3}$ см Б $2\frac{2}{3}$ см В 3 см Г 2,5 см

6. Сторона трикутника, вписаного в коло, у $\sqrt{3}$ рази більша за радіус кола. Знайдіть кут трикутника, протилежний даній стороні.

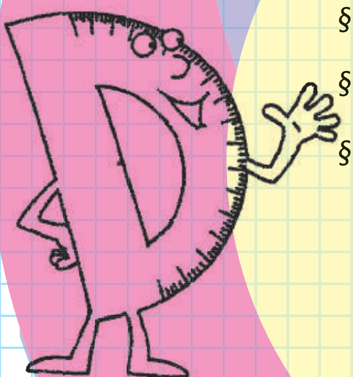
   А 30° Б 60° В 120° Г 60° або 120°.

7. Одна зі сторін трикутника менша за його півпериметр на 2 см, друга — на 4 см, третя — на 3 см. Знайдіть площу трикутника.

   А 252 см^2 В 126 см^2
   Б 84 см^2 Г Визначити неможливо

Розділ II

Координати на площині



Мислю, отже, існую.

Рене Декарт, французький учений

Координатний метод, біля витоків виникнення якого стояв великий французький математик і філософ XVII ст. Рене Декарт, став справжнім переворотом у геометрії та математиці в цілому. Завдяки координатам учені отримали універсальний спосіб поставити у відповідність геометричним об'єктам алгебраїчні вирази і співвідношення. Узагалі, уміння перейти в процесі розв'язування задачі до іншої пошукової області завжди вважалося «найвищим пілотажем» математики. Відкриття Декарта дало науці можливість створити своєрідний словник для перекладу геометричних задач мовою алгебри з подальшою можливістю використовувати рівняння і тотожні перетворення виразів для розв'язування суто геометричних проблем.

У наш час жодну природничу науку або технічну галузь неможливо уявити на сучасному рівні розвитку без застосування координат. Більш того, доведення багатьох уже відомих вам геометричних тверджень завдяки координатному методу значно спрощуються. І хоча на перший погляд теореми й задачі цього розділу здаватимуться вам дещо незвичними для геометрії, але можливості, які відкриває метод координат, варті зусиль, витрачених на його засвоєння.

§ 6 Найпростіші задачі в координатах

6.1. Прямокутна система координат на площині (повторення)

Нагадаємо, що для введення системи координат на площині через довільну точку O необхідно провести дві взаємно перпендикулярні прямі Ox і Oy, вибрати на кожній із них напрям (його позначають стрілкою) і одиничний відрізок (рис. 27).

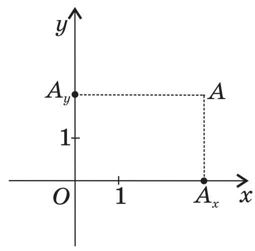


Рис. 27. Прямокутна система координат на площині

Точку O називають *початком координат*, площину, на якій проведено прямі, — *координатною площиною*, а самі прямі Ox і Oy — *координатними осями* (або *осями координат*). Початок координат ділить кожну з осей на дві півосі: додатну (на ній позначається стрілка) і від'ємну.

Тепер будь-якій точці A даної площини можна однозначно поставити у відповідність упорядковану пару чисел — *координати* цієї точки. Для цього з точки A проведемо перпендикуляри $AA_x \perp Ox$ і $AA_y \perp Oy$. Перша координата точки A — *абсциса* (позначається буквою x) — є додатним числом, якщо точка A_x лежить на додатній півосі осі Ox, або від'ємним числом, якщо точка A_x лежить на від'ємній півосі осі Ox. При цьому модуль числа x дорівнює довжині відрізка OA_x. Аналогічно визначається друга координата точки A — *ордината* (позначається буквою y): це додатне число, якщо точка A_y лежить на додатній півосі осі Oy, або від'ємне число, якщо точка A_y лежить на від'ємній півосі осі Oy; модуль числа y дорівнює довжині відрізка OA_y. Координати точки A записують так: $A(x; y)$. При цьому абсцису точки вказують першою, а ординату — другою.

Ординати точок осі Ox дорівнюють нулю, абсциси точок осі Oy також дорівнюють нулю, а початок координат має координати $O(0; 0)$.

Абсциса — від латинського «абсцисум» — відрізаний, відсічений.

Ордината — від латинського «ординатус» — упорядкований. Від цього кореня походить і слово «координата».

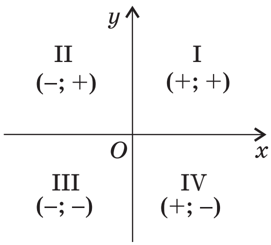


Рис. 28. Знаки координат точок у різних координатних чвертях

Вісь Ox (зазвичай вона горизонтальна) називають *віссю абсцис*, вісь Oy — *віссю ординат*, а введену таким способом систему координат — **прямокутною декартовою** на честь Рене Декарта, який першим застосував її у своїх дослідженнях.

Осі координат ділять площину на чотири частини **(координатні чверті)**. У межах однієї чверті знаки координат точок зберігаються такими, які вказані на рис. 28.

Розглянемо основні випадки застосування координат для вивчення геометричних фігур та їхніх властивостей.

6.2. Координати середини відрізка

Теорема (формули координат середини відрізка)

Координати середини відрізка обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

де $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ — кінці відрізка, $C(x;\ y)$ — середина відрізка.

Доведення

□ Нехай відрізок AB не перетинає вісь Ox. Розглянемо випадок, коли $x_1 < x_2$ (рис. 29). Проведемо перпендикуляри AA_0, BB_0 і CC_0 до осі Ox. Очевидно, що $AA_0 \parallel BB_0 \parallel CC_0$ і основи перпендикулярів мають координати $A_0(x_1;\ 0)$, $B_0(x_2;\ 0)$ і $C_0(x;\ 0)$. Оскільки точка C — середина відрізка AB, то за теоремою Фалеса точка C_0 — середина відрізка A_0B_0. Це означає, що $A_0C_0 = C_0B_0$, тобто $x_2 - x = x - x_1$, звідки $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

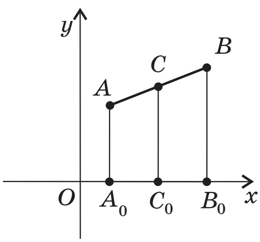


Рис. 29. До доведення формул координат середини відрізка

Той самий результат одержимо і у випадку $x_1 > x_2$ (перевірте це самостійно). У випадку $x_1 = x_2$ точки A_0, B_0 і C_0 збігаються, тобто $x_1 = x = x_2$ і формула знову справджується.

Випадок, коли відрізок AB перетинає вісь Ox, зводиться до щойно розглянутого.

Рівність $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ доводимо аналогічно. ■

Задача

Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$, $D(2;\ -2)$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

Розв'язання (1-й спосіб)

Як відомо, за ознакою паралелограма чотирикутник, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл, є паралелограмом. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD даного чотирикутника $ABCD$. Середина відрізка AC має координати:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Середина відрізка BD має координати:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Отже, відрізки AC і BD мають спільну середину $(1;\ 1)$, тобто чотирикутник $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Інший спосіб розв'язування цієї задачі розглянемо далі.

6.3. *Відстань між точками*

Теорема (формула відстані між двома точками)

Відстань між точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ обчислюється за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

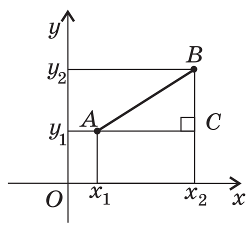


Рис. 30. До доведення формули відстані між точками

Доведення

□ Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (рис. 30). Проведемо через дані точки A і B прямі, перпендикулярні до осей координат, і позначимо точку їх перетину C. Відстань між точками A і C дорівнює $\left|x_2-x_1\right|$, а відстань між точками B і C дорівнює $\left|y_2-y_1\right|$. Отже, з прямокутного трикутника ABC за теоремою Піфагора маємо:

$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, або $AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

У випадку, коли $x_1=x_2$, $y_1\neq y_2$, відстань між точками A і B дорівнює $\left|y_2-y_1\right|$. Той самий результат дає і щойно доведена формула. Аналогічно у випадку $x_1\neq x_2$, $y_1=y_2$ маємо: $AB=\left|x_2-x_1\right|$. Якщо точки A і B збігаються, відстань між ними за доведеною формулою дорівнює нулю. ■

Як приклад застосування доведеної формули розглянемо другий спосіб розв'язування задачі з п. 6.2.

Задача

Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$, $D(2;\ -2)$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

Розв'язання (2-й спосіб)

Як відомо, чотирикутник, протилежні сторони якого попарно рівні, є паралелограмом (за ознакою). Знайдемо довжини сторін чотирикутника $ABCD$:

$$AB=\sqrt{(0-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{13},\quad BC=\sqrt{(4-0)^2+(1-4)^2}=5,$$

$$CD=\sqrt{(2-4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13},\quad AD=\sqrt{(2-(-2))^2+(-2-1)^2}=5.$$

Отже, $AB = CD$, $BC = AD$, тобто чотирикутник $ABCD$ — паралелограм за ознакою.

Запитання і задачі

Усні вправи

173. Із точки $A(3;\ -5)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Назвіть координати основ цих перпендикулярів.

174. Визначте, в якій координатній чверті лежить точка $A(x;\ y)$, якщо:
а) $x=-4$, $y=-9$;
б) $x>0$, $y<0$;
в) точка A лежить вище від осі абсцис і ліворуч від осі ординат.

175. Визначте, які з координатних осей перетинає відрізок CD, якщо:
а) $C(3;\ -2)$, $D(8;\ 1)$; б) $C(-4;\ -5)$, $D(2;\ -3)$; в) $C(1;\ -6)$, $D(-7;\ 2)$.

176. Середина відрізка AB лежить на осі ординат. Назвіть абсцису точки A, якщо абсциса точки B дорівнює 12.

177. Точка C — середина відрізка AB. Визначте:
а) ординату точки B, якщо $A(x_1; 3)$, $C(x_2; 3)$;
б) абсцису точки A, якщо $C(-1; y_1)$ і $B(-1; y_2)$.
Якій із координатних осей паралельний відрізок AB у кожному випадку?

178. Довжина відрізка AB дорівнює 5. Чи можуть:
а) абсциси точок A і B відрізнятися на 7;
б) ординати точок A і B відрізнятися на 5?

Графічні вправи

179. Зобразіть на координатній площині геометричне місце точок $M(x; y)$, які задовольняють умову:
а) $x \geqslant -3$; б) $y \leqslant 1$; в) $\begin{cases} x = y, \\ |x| < 2. \end{cases}$

180. Через точку $C(-3; 4)$ проведіть прямі, паралельні осям координат. Опишіть за допомогою нерівностей умови, що їх задовольняють усі внутрішні точки прямокутника, утвореного цими прямими та осями координат.

Письмові вправи

Рівень А

181. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(-12; -3)$, $B(-8; 1)$;
б) $A(4; -11)$, $B(-4; 0)$;
в) $A(-2; 9)$, $B(-2; -7)$.

182. Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати:
а) точки B, якщо $A(2; -3)$, $C(0{,}5; 1)$;
б) точки A, якщо $C(0; -1)$, $B(3; -3)$.

183. Точка E — середина відрізка CD. Знайдіть координати:
а) точки E, якщо $C(18; -2)$, $D(6; 4)$;
б) точки D, якщо $C(-5; 21)$, $E(0; 1)$.

184. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(2; 6)$, $B(4; 7)$, $C(8; 10)$;
б) $B(-1; 4)$, $C(3; 5)$, $D(1; 3)$.

185. Дано точки $A(-4;\ 0)$, $B(-2;\ -2)$, $C(0;\ -6)$, $D(-2;\ -4)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

186. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
а) $A(-3;\ 8)$, $B(5;\ 2)$;
б) $A(2;\ -1)$, $B(-7;\ 0)$;
в) $A(5;\ 0)$, $B(0;\ -12)$.

187. Знайдіть x, якщо:
а) відстань між точками $M(2;\ 1)$ і $N(x;\ -2)$ дорівнює 5;
б) відстань між точками $M(x;\ 0)$ і $N(2;\ -1)$ дорівнює 1.

188. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 6)$, $C(5;\ 2)$.

189. Доведіть, що в трикутнику з вершинами $A(-6;\ 5)$, $B(2;\ -10)$, $C(-13;\ -18)$ кути A і C рівні.

190. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(1; 0)$, $B\left(2; \sqrt{3}\right)$, $C(3; 0)$ рівносторонній.

Рівень Б

191. Дано точку $A(-4;\ 3)$. Знайдіть точку B таку, щоб відрізок AB був паралельним одній із координатних осей, а його середина лежала:
а) на осі абсцис;
б) на осі ординат.

192. Точка $C(x;\ y)$ — середина відрізка з кінцями в точках $A(-y;\ -4)$ і $B(3;\ x)$. Знайдіть x і y.

193. Точка C — середина відрізка AB, точка D — середина відрізка BC. Знайдіть координати точки D, якщо:
а) $A(-3;\ 3)$, $B(5;\ -1)$;
б) $A(-2;\ -1)$, $C(2;\ 3)$.

194. На відрізку AD позначено точки B і C так, що $AB = BC = CD$. Знайдіть координати точки D, якщо $A(5;\ 2)$, $B(3;\ 1)$.

195. За допомогою формули відстані між точками доведіть, що точки $K(5;\ -3)$, $M(2;\ 1)$ і $N(-1;\ 5)$ лежать на одній прямій. Яка із цих точок лежить між двома іншими?

196. Знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок $(2;\ 3)$ і $(6;\ -1)$ та лежить:
а) на осі абсцис;
б) на осі ординат.

197. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(4;\ 1)$, $B(6;\ 2)$, $C(8;\ -2)$ прямокутний, і визначте його гіпотенузу.

198. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(-6;\ -3)$, $B(-4;\ 3)$, $C(-2;\ -1)$.

199. У трикутнику ABC знайдіть довжину середньої лінії, паралельної стороні AC, якщо $A(-2; 1)$, $B(-2; 7)$, $C(2; 5)$. Розв'яжіть задачу двома способами.

200. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, якщо $A(-2; -1)$, $B(-4; 1)$, $C(-1; 4)$, $D(1; 2)$.

201. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — ромб, якщо $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(3; 6)$, $D(0; 5)$.

Рівень В

202. Середини сторін трикутника мають координати $(-2; 2)$, $(0; 7)$ і $(4; -1)$. Знайдіть координати вершин трикутника.

203 (опорна). *Точка C, яка ділить відрізок з кінцями в точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ у відношенні $AC : CB = m : n$, має координати* $x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$, $y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}$. Доведіть.

204. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $(1; 2)$, $(0; 7)$ і $(5; 6)$.

205. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо $A(-5; 0)$, $B(-2; 1)$, $C(-1; -2)$, $D(-4; -3)$.

206. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $A(-1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(4; -2)$.

207. Знайдіть периметр і площу трикутника, серединами сторін якого є точки $(-3; -1)$, $(1; -1)$ і $(1; 2)$.

Повторення перед вивченням § 7

Теоретичний матеріал

- геометричні місця точок;
- лінійна функція та її графік.

7 клас, § 22

алгебра, 7 клас

Задачі

208. Зобразіть на координатній площині геометричне місце точок:
а) віддалених від початку координат на 4;
б) рівновіддалених від точок $A(-1; 3)$ і $B(5; -1)$.

209. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин рівнобедреного прямокутного трикутника.

§ 7 Рівняння кола і прямої

7.1. Рівняння фігури на площині

На уроках алгебри ви розглядали функції і будували їхні графіки у прямокутній системі координат. Так, наприклад, графіком функції $y = x$ є пряма l, яка проходить через початок координат O (рис. 31). Це означає, що координати будь-якої точки прямої l задовольняють рівняння $y = x$ (тобто є рівними). Також будь-які два числа, що задовольняють рівняння $y = x$, є координатами деякої точки прямої l. Рівняння $y = x$ є *рівнянням прямої* l. За допомогою рівнянь можна описувати й інші фігури на площині.

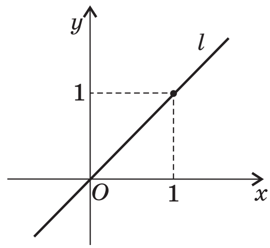


Рис. 31. Пряма l — графік функції $y = x$

Означення

Рівняння з двома змінними x і y називається **рівнянням фігури F у прямокутній системі координат**, якщо:

1) координати будь-якої точки фігури F задовольняють це рівняння;

2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури F.

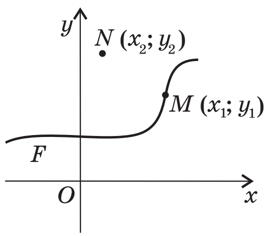


Рис. 32. До означення рівняння фігури

Так, на рис. 32 координати точки M — числа x_1 і y_1 — задовольняють рівняння фігури F, а координати точки N — числа x_2 і y_2 — не задовольняють.

Зазвичай у процесі вивчення фігур на координатній площині виникають дві взаємно обернені задачі: побудова фігури за даним рівнянням і знаходження рівняння фігури за її властивостями. Перший вид задач ви неодноразово розв'язували в курсі алгебри, будуючи графіки функцій та рівнянь. Розглянемо другий вид задач щодо кола і прямої.

7.2. Рівняння кола

Теорема (про рівняння кола)

У прямокутній системі координат рівняння кола радіуса R із центром у точці $C(a;\ b)$ має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Доведення

□ Нехай у прямокутній системі координат задано коло радіуса R $(R>0)$ із центром у точці $C(a;\ b)$ (рис. 33). Оберемо довільну точку кола $M(x;\ y)$. За означенням кола відстань від центра до довільної точки кола дорівнює R, тобто $CM=R$, отже, $CM^2=R^2$. Записавши цю рівність у координатній формі, маємо:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Оскільки M — довільна точка кола, то це рівняння задовольняють координати будь-якої точки кола.

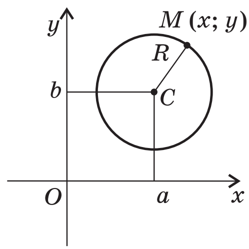


Рис. 33. До доведення теореми про рівняння кола

Згідно з означенням рівняння фігури доведемо обернене твердження. Нехай числа x_0 і y_0 задовольняють наше рівняння, тобто $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$, або $\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=R$. За формулою відстані між точками це означає, що відстань між точками $M_0(x_0;\ y_0)$ і $C(a;\ b)$ дорівнює R. Отже, точка $M_0(x_0;\ y_0)$ є точкою кола радіуса R із центром C.

Таким чином, обидві вимоги до рівняння фігури справджуються. Теорему доведено. ■

Наслідок

Коло радіуса R із центром у початку координат задається рівнянням вигляду

$$x^2+y^2=R^2.$$

Узагалі, будь-яке рівняння вигляду

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \text{ де } R>0,$$

описує коло радіуса R із центром $C(a;\ b)$.

Задача

Визначте центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$.

Розв'язання

Зведемо дане рівняння до вигляду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Маємо:
$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 11$.

Додамо до обох частин цієї рівності числа так, щоб виділити квадрати двочленів $(x-a)$ і $(y-b)$: $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 11 + 4 + 1$,
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4^2$. Отже, дане коло має радіус 4 і центр (2; –1).

Відповідь: (2; –1), $R = 4$.

7.3. Рівняння прямої

Для виведення рівняння кола ми скористалися тим, що коло є геометричним місцем точок, віддалених від даної точки на задану відстань. Нагадаємо, що за теоремою про серединний перпендикуляр пряму можна описати як геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка. Застосуємо цей факт для доведення такої теореми.

Теорема (про рівняння прямої)

У прямокутній системі координат рівняння прямої має вигляд

$ax + by + c = 0$, де a, b, c — деякі числа.

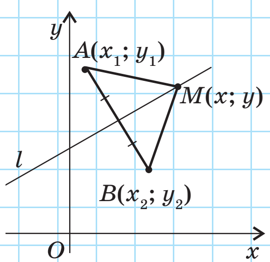


Рис. 34. До доведення теореми про рівняння прямої

☐ Дано: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, $M \in l$, $M(x; y)$.

Довести: $ax + by + c = 0$ — рівняння прямої l (a, b, c — числа, які залежать від A і B).

Доведення

Пряма l — серединний перпендикуляр до відрізка AB, тому $AM = MB$ (рис. 34). Запишемо цю рівність в координатах: $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$;
$x^2 - 2x x_1 + x_1^2 + y^2 - 2y y_1 + y_1^2 = x^2 - 2x x_2 + x_2^2 + y^2 - 2y y_2 + y_2^2$;
зведемо подібні доданки:
$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0$.

x_1, y_1, x_2, y_2 — числа; позначимо $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = c$, отримаємо рівняння прямої: $ax + by + c = 0$. Оскільки $M(x; y)$ — довільна точка прямої l, то рівняння $ax + by + c = 0$ задовольняють координати будь-якої точки даної прямої.

Нехай тепер числа x_0 і y_0 — координати деякої точки M_0 — задовольняють наше рівняння. У цьому випадку $M_0A = M_0B$, тобто точка M_0 рівновіддалена від точок A і B, отже, належить серединному перпендикуляру до відрізка AB — прямій l.

На завершення доведення зауважимо, що, оскільки A і B — дві різні точки, то хоча б одна з різниць $(x_2 - x_1)$ або $(y_2 - y_1)$ не дорівнює нулю, тобто хоча б одне з чисел a або b обов'язково відмінне від нуля. ■

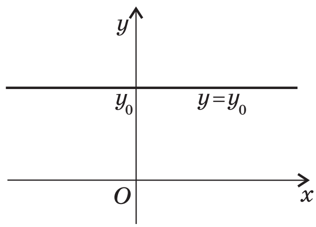
Узагалі, *будь-яке рівняння вигляду $ax + by + c = 0$, де a і b не дорівнюють нулю одночасно, описує деяку пряму.*

Виділимо три окремі випадки розміщення прямої у прямокутній системі координат.

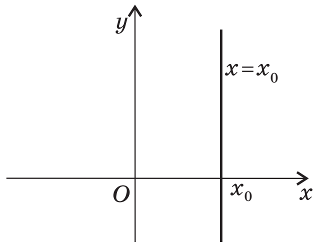
1) $a = 0$, $b \neq 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $by + c = 0$, або $y = y_0$, де $y_0 = -\dfrac{c}{b}$ — деяке число. Пряма $y = y_0$ паралельна осі абсцис (рис. 35, *а*) або збігається з нею (рівняння осі абсцис має вигляд $y = 0$).

2) $a \neq 0$, $b = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + c = 0$, або $x = x_0$, де $x_0 = -\dfrac{c}{a}$ — деяке число. Пряма $x = x_0$ паралельна осі ординат (рис. 35, *б*) або збігається з нею (рівняння осі ординат має вигляд $x = 0$).

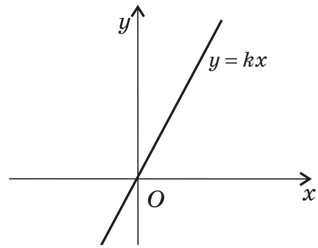
3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + by = 0$, або $y = kx$, де $k = -\dfrac{a}{b}$ — деяке число. Пряма $y = kx$ проходить через початок координат (рис. 35, *в*).



а

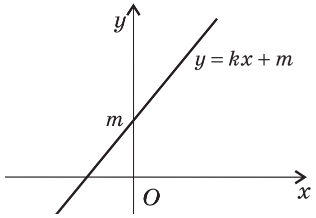


б



в

Рис. 35. Окремі випадки розміщення прямої в системі координат [Див. також с. 68]



г

Рис. 35. [Закінчення]

Зазначимо також, що для прямих, не паралельних осі ординат, рівняння $ax + by + c = 0$ можна подати у вигляді $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, або $y = kx + m$, де k і m — деякі числа (рівняння невертикальної прямої) (рис. 35, *г*). Саме такий вигляд рівняння прямої зручно використовувати для розв'язування багатьох, зокрема й алгебраїчних, задач.

Задача

Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-6; -1)$ і $B(3; 2)$.

Розв'язання

Оскільки абсциси точок A і B не рівні, пряма AB не паралельна осі ординат. Отже, будемо шукати її рівняння у вигляді $y = kx + m$.

За умовою задачі координати точок A і B задовольняють шукане рівняння, тобто $\begin{cases} -1 = -6k + m, \\ 2 = 3k + m. \end{cases}$

Розв'язком системи цих рівнянь буде пара $k = \frac{1}{3}$, $m = 1$. Таким чином, $y = \frac{1}{3}x + 1$ — шукане рівняння.

Зведемо його до вигляду $ax + by + c = 0$: $3y = x + 3$, $x - 3y + 3 = 0$.

Відповідь: $x - 3y + 3 = 0$.

Зауважимо, що правильною відповіддю в цій задачі є також будь-яке рівняння, яке можна отримати з наведеного множенням обох частин на число, відмінне від нуля.

Запитання і задачі

Усні вправи

210. Назвіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
а) $x^2 + y^2 = 25$;
б) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 100$;
в) $x^2 + (y + 3)^2 = 2$.

211. Центром кола радіуса R є початок координат. Скільки точок перетину з осями координат має це коло? Назвіть координати цих точок.

212. Коло задане рівнянням $(x-3)^2+(y-5)^2=16$. Чи перетинає це коло вісь абсцис; вісь ординат?

213. Серед прямих $2x-3y=0$, $4y-8=0$, $3x+y+9=0$, $5-10x=0$ виберіть прямі, які:

а) паралельні осі абсцис;

б) паралельні осі ординат;

в) проходять через початок координат.

214. Пряма проходить через точки $A(4;\ 0)$ і $B(4;\ 3)$. Чи проходить вона через точки $C(4;\ -1)$ і $D(0;\ 4)$?

Графічні вправи

215. Побудуйте в прямокутній системі координат коло, задане рівнянням $(x-4)^2+(y+1)^2=9$, і пряму $x-y+2=0$. Позначте на рисунку:

а) дві точки з цілочисельними координатами, які лежать на даному колі й не лежать на даній прямій;

б) дві точки з цілочисельними координатами, які лежать на даній прямій і не лежать на даному колі;

в) точки перетину кола і прямої.

216. Побудуйте в прямокутній системі координат коло, задане рівнянням $(x+4)^2+(y+4)^2=25$, і пряму, яка проходить через центр цього кола і початок координат.

а) Запишіть рівняння побудованої прямої.

б) Визначте за рисунком координати точок перетину кола з осями координат. Перевірте отримані результати підстановкою в рівняння кола.

Письмові вправи

Рівень А

217. Визначте, які з точок $A(-1;\ 5)$, $B(-4;\ 0)$, $C(5;\ -3)$, $D(-3;\ 1)$, $E(2;\ 1)$ лежать на колі, заданому рівнянням $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

218. Складіть рівняння кола:

а) радіуса 3 із центром $(-2;\ 1)$;

б) із центром у початку координат, яке проходить через точку $(-4;\ -3)$;

в) з діаметром AB, якщо $A(-2;\ 1)$, $B(2;\ 1)$.

219. Складіть рівняння кола із центром A і радіусом AB, якщо $A(1; 1)$, $B(-3; -2)$. Які з точок $C(4; 5)$, $D(-4; 1)$, $E(1; 4)$ лежать на цьому колі?

220. На колі, заданому рівнянням $x^2 + y^2 = 100$, знайдіть точки:
а) з абсцисою 8; б) з ординатою −6.

221. Визначте, чи має коло, задане рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$, спільні точки з осями координат. Якщо так, знайдіть координати цих точок.

222. Коло задане рівнянням $x^2 + (y - 1)^2 = 4$. Знайдіть точки перетину цього кола з осями координат.

223. Визначте, які з точок $A(3; -1)$, $B(-3; 0)$, $C(12; 5)$, $D(1; 0)$, $E(-9; -2)$ лежать на прямій, заданій рівнянням $x - 3y + 3 = 0$.

224. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $(-6; 2)$ і:
а) паралельна осі ординат;
б) паралельна осі абсцис;
в) проходить через початок координат.

225. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і центр кола, заданого рівнянням $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$. Визначте, які з точок $A(-1; -1)$, $B(-8; 8)$, $C(12; 12)$ лежать на цій прямій.

226. Знайдіть точки перетину:
а) прямих $2x - 5y + 1 = 0$ і $y = 3$;
б) прямої $3x + y + 6 = 0$ з осями координат;
в) прямої $x - y = 0$ і кола $x^2 + y^2 = 8$.

227. Доведіть, що коло $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ дотикається до осі ординат. Знайдіть координати точки дотику.

228. Знайдіть точку перетину прямих $2x - y - 9 = 0$ і $y = -x$.

Рівень Б

229. Визначте центр і радіус кола, заданого рівнянням:
а) $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 6 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 10y + 24 = 0$.

230. Складіть рівняння:
а) кола з діаметром AB, якщо $A(-1; 5)$, $B(5; -3)$;
б) кола, описаного навколо рівностороннього трикутника з точкою перетину медіан $(-4; 9)$ і периметром $6\sqrt{3}$;
в) кола, вписаного у квадрат $ABCD$, якщо $A(-1; -3)$, $B(-1; -1)$, $C(1; -1)$, $D(1; -3)$.

231. Складіть рівняння кола:

а) вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20 та лежать на осях координат;

б) описаного навколо прямокутного трикутника ABC, якщо $\angle A = 90°$, $B(4; 0)$, $C(-2; -8)$.

232. Коло із центром $C(-4; 5)$ дотикається до осі абсцис. Складіть рівняння цього кола і знайдіть точки його перетину з віссю ординат.

233. Складіть рівняння кіл радіуса 2, які мають центр на осі абсцис і дотикаються до осі ординат.

234. Складіть рівняння прямої, яка:

а) проходить через точки $(-1; -6)$ і $(1; 2)$;

б) проходить через початок координат і центр кола $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$;

в) перетинає осі координат в точках $(-3; 0)$ і $(0; -3)$.

235. Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника ABC, якщо $A(-1; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 2)$.

236. Знайдіть точку перетину прямих:

а) $3x + y + 5 = 0$ і $x - 2y - 3 = 0$;

б) $x - y + 1 = 0$ і $2x - 5y + 5 = 0$;

в) дотичних до кола $x^2 + y^2 = 4$ в точках $(2; 0)$ і $(0; -2)$.

237. Знайдіть точки перетину:

а) прямої $x - 3y + 6 = 0$ і кола $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$;

б) кіл $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 5$.

238. Дано коло $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$ і прямі $x - y + 3 = 0$ та $x + y - 9 = 0$. Знайдіть точку перетину даних прямих і спільні точки кожної з них і кола.

Рівень В

239. Складіть рівняння кола, якщо:

а) воно проходить через точки $(-5; 1)$ і $(3; 5)$, а його центр лежить на осі ординат;

б) воно проходить через точки $(1; 4)$ і $(5; 4)$, а його радіус дорівнює $2\sqrt{2}$.

240. Складіть рівняння кола радіуса 5 із центром на осі абсцис, якщо воно проходить через точку $(1; -3)$. Скільки розв’язків має задача?

241 (опорна). *Рівняння прямої, яка перетинає осі координат у точках* $(a; 0)$ *і* $(0; b)$, *де* $a \neq 0$ *і* $b \neq 0$, *має вигляд* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ *(рівняння прямої у відрізках)*. Доведіть.

242. Доведіть, що прямі $x + y - 5 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ і $x - 3y + 3 = 0$ перетинаються в одній точці.

243. Знайдіть довжину хорди, яка утворюється в результаті перетину кола $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ прямою $x - y + 9 = 0$.

244. Знайдіть периметр трикутника, обмеженого прямими $4x - 3y + 3 = 0$, $y = 1$, $x = 3$. Складіть рівняння прямої, що містить медіану трикутника, проведену до середньої за довжиною сторони.

Повторення перед вивченням § 8

Теоретичний матеріал

- властивості й ознаки; 7 клас, п. 13.2
- взаємне розміщення графіків лінійних функцій; алгебра, 7 клас
- види чотирикутників. 8 клас, § 4, 5

Задачі

245. Сформулюйте і доведіть три ознаки квадрата.

246. Два трикутники вписані в одне коло. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см. Знайдіть сторони другого трикутника, якщо він є єгипетським.*

* Нагадаємо, що єгипетським трикутником називається прямокутний трикутник, сторони якого відносяться як 3 : 4 : 5.

§ 8 Застосування формул, пов'язаних з координатами, та рівнянь фігур до розв'язування задач

8.1. Розв'язування задач на доведення та обчислення із застосуванням формул, пов'язаних з координатами

Формули й рівняння, отримані в цьому розділі, дають можливість вивчати геометричні фігури та їхні властивості за допомогою рівнянь і нерівностей, тобто використовувати в геометрії засоби алгебри. Такий метод дослідження геометричних фігур називають *методом координат*, а відповідний розділ геометрії — *аналітичною геометрією*.

Задача

Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

Розв'язання

Сформулюємо задачу в координатах. Для цього розмістимо дану трапецію $ABCD$ у системі координат так, щоб її вершини мали координати $A(0; 0)$, $B(a; b)$, $C(c; b)$, $D(d; 0)$ (рис. 36). Виразимо суму квадратів діагоналей трапеції через координати її вершин:

$$AC^2 + BD^2 = c^2 + b^2 + (a-d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2ad.$$

Обчислимо довжини основ трапеції: $AD = d$, $BC = c - a$.

Виразимо в координатах суму квадратів бічних сторін:

$$AB^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + (c-d)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2cd.$$

Додаючи до цього виразу подвоєний добуток основ, маємо: $AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2cd + 2cd - 2ad = a^2 + 2b^2 + c^2 + d^2 - 2ad$. Отже, $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$, що й треба було довести.

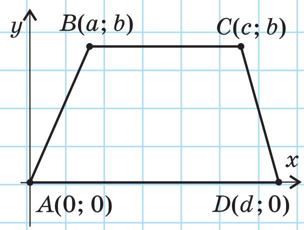


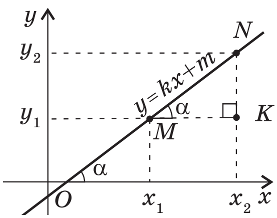
Рис. 36

Отже, розв'язування геометричної задачі методом координат складається з трьох основних етапів:

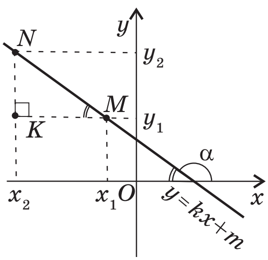
1) сформулювати задачу мовою координат;
2) перетворити алгебраїчні вирази, користуючись відомими співвідношеннями та формулами;
3) перекласти отриманий результат мовою геометрії.

На першому етапі розв'язування часто необхідно задати на площині систему координат. Зазвичай її вибирають так, щоб якнайбільше координат розглядуваних точок фігури дорівнювали нулю або легко виражались через невелику кількість параметрів. Це дозволяє максимально спростити подальші алгебраїчні перетворення.

8.2. Дослідження рівняння прямої



а



б

Рис. 37. Визначення кутового коефіцієнта прямої

Як відомо з курсу алгебри, у рівнянні невертикальної прямої $y=kx+m$ число k називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Нехай пряма проходить через точки $M(x_1;\ y_1)$ і $N(x_2;\ y_2)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис гострий кут α (рис. 37, *а*). Виразимо з прямокутного трикутника MNK тангенс кута α:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\angle NMK=\frac{NK}{MK},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(kx_2+m)-(kx_1+m)}{x_2-x_1}=\frac{k(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=k.$$

У випадку, коли кут α тупий (рис. 37, *б*):

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(180^\circ-\angle NMK)=-\operatorname{tg}\angle NMK,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k.$$

Отже, *кутовий коефіцієнт прямої k дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до додатної півосі осі абсцис*.

Геометричний зміст чисел k і m у рівнянні $y=kx+m$ унаочнено на рис. 38.

Теорема (критерій паралельності прямих у системі координат)

Прямі l_1 і l_2, задані рівняннями $y = k_1 x + m_1$ і $y = k_2 x + m_2$ відповідно, паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$.

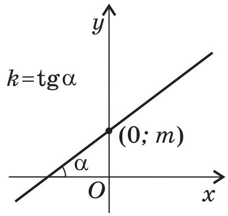


Рис. 38. Геометричний зміст k і m у рівнянні прямої

Доведення

□ 1) *Властивість*. Нехай $l_1 \parallel l_2$. У випадку, коли обидві ці прямі паралельні осі абсцис, $k_1 = k_2 = 0$ і твердження теореми очевидне. В іншому випадку (рис. 39) $\alpha_1 = \alpha_2$ як відповідні кути при паралельних прямих l_1 і l_2 та січній Ox. Отже, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$, тобто $k_1 = k_2$. Очевидно, що $m_1 \neq m_2$, оскільки в іншому випадку дані прямі збігаються.

2) *Ознака*. Якщо $k_1 = k_2 = 0$, твердження теореми очевидне. Проведемо доведення для випадку, коли дані прямі утворюють з додатною піввіссю осі абсцис гострі кути (інший випадок розгляньте самостійно). Нехай $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$, звідки $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Оскільки різним гострим кутам α відповідають різні тангенси, то $\alpha_1 = \alpha_2$, отже, за ознакою паралельності прямих $l_1 \parallel l_2$. Теорему доведено повністю. ■

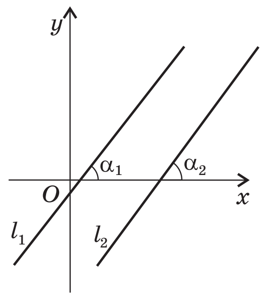


Рис. 39. До доведення властивості й ознаки паралельності прямих

Теорема (критерій перпендикулярності прямих у системі координат)

Прямі l_1 і l_2, задані рівняннями $y = k_1 x + m_1$ і $y = k_2 x + m_2$ відповідно, перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Доведення

□ 1) *Властивість*.

Нехай $l_1 \perp l_2$ (рис. 40). Із прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) маємо:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\angle CAB = \frac{BC}{AC} = \operatorname{ctg}\angle CBA = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle CBA} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \alpha_2)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Отже, $\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = k_1 \cdot k_2 = -1$.

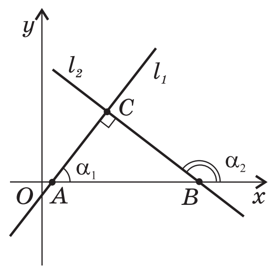


Рис. 40. До доведення властивості й ознаки перпендикулярності прямих

2) *Ознака.*

Нехай $k_1 \cdot k_2 = -1$, тобто $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. Оскільки $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ (див. рис. 40), то

$$\operatorname{tg}\angle CAB = -\frac{1}{\operatorname{tg}(180° - \angle CBA)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\angle CBA} = \operatorname{ctg}\angle CBA.$$

Враховуючи, що $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$, маємо: $\operatorname{tg}\angle CAB = \operatorname{tg}(90° - \angle CBA)$. Оскільки кут CBA гострий, то кут $(90° - \angle CBA)$ також гострий, отже, $\angle CAB = 90° - \angle CBA$. Тоді $\angle CAB + \angle CBA = 90°$, тобто $\angle C = 90°$. Теорему доведено повністю. ■

Задача

Визначте, чи є серед прямих $x - 3y - 3 = 0$, $3x + y - 9 = 0$ і $x - 3y + 12 = 0$ паралельні або перпендикулярні.

Розв'язання

Подамо рівняння даних прямих у вигляді $y = kx + m$:

$$y = \frac{1}{3}x - 1,\ \ y = -3x + 9,\ \ y = \frac{1}{3}x + 4.$$

Отже, оскільки $\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$, прямі $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = \frac{1}{3}x + 4$ перпендикулярні до прямої $y = -3x + 9$. Оскільки $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ і $-1 \neq 4$, то прямі $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = \frac{1}{3}x + 4$ паралельні.

8.3. *Застосування координат до розв'язування задач на відшукання ГМТ*

Розв'язування задач на відшукання ГМТ за допомогою методу координат передбачає два основні етапи:

1) складання рівняння з двома невідомими x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки шуканого ГМТ. На цьому етапі обґрунтовується пряме твердження: якщо точка $M(x; y)$ — довільна точка шуканого ГМТ, то її координати задовольняють знайдене рівняння;

2) доведення оберненого твердження: будь-яка точка, координати якої задовольняють знайдене рівняння, належить шуканому ГМТ.

Задача

Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок площини, для яких різниця $MA^2 - MB^2$ дорівнює сталому числу k.

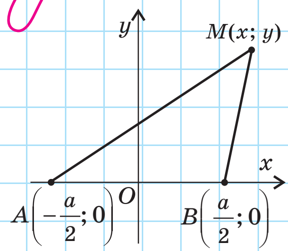


Рис. 41

Розв’язання

Виберемо систему координат так, щоб точки A і B лежали на осі абсцис, а середина відрізка AB збігалася з початком координат (рис. 41). Нехай $AB = a$, тоді дані точки матимуть координати $A\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$ і $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

Для довільної точки $M(x; y)$ за умовою задачі $MA^2 - MB^2 = k$. Записавши цю умову в координатах, маємо: $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = k$.

Спростивши цей вираз, одержимо: $2ax = k$, тобто $x = \frac{k}{2a}$.

Отже, кожна точка шуканого ГМТ належить прямій $x = \frac{k}{2a}$, яка паралельна осі ординат (тобто перпендикулярна до прямої AB) і проходить через точку $\left(\frac{k}{2a}; 0\right)$. І навпаки: якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій $x = \frac{k}{2a}$, то її координати задовольняють рівняння $MA^2 - MB^2 = k$, отже, точка M належить шуканому ГМТ.

Запитання і задачі

Усні вправи

247. Квадрат зі стороною 1 розміщений у системі координат так, що три його вершини лежать на осях координат, а четверта — у першій координатній чверті. Назвіть координати вершин квадрата.

248. Ромб із діагоналями 6 і 8 розміщений у системі координат так, що його діагоналі лежать на осях координат, причому більша діагональ — на осі абсцис. Назвіть координати вершин ромба.

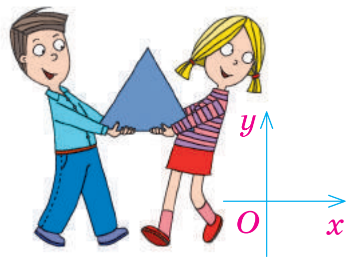
249. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої, яка:

а) паралельна прямій $y = -0{,}5x + 7$;

б) перпендикулярна до прямої $y = -0{,}5x + 7$.

250. Одна з основ трапеції лежить на осі абсцис. Яким рівнянням задається пряма, що містить другу основу, якщо висота трапеції дорівнює 8? Скільки розв'язків має задача?

Графічні вправи



251. Розмістіть у системі координат рівнобедрений трикутник з основою 6 і бічною стороною 5 так, щоб основа і вершина, протилежна основі трикутника, лежали на осях координат. Визначте координати вершин трикутника.

252. Розмістіть у системі координат прямокутну трапецію з основами a і b ($a < b$) і висотою h так, щоб дві сторони трапеції лежали на осях координат. Визначте координати вершин трапеції.

Письмові вправи

Рівень А

253. Складіть рівняння прямої, яка:
а) паралельна прямій $2x + 3y + 1 = 0$ і проходить через точку (1; 1);
б) паралельна прямій $x + y - 14 = 0$ і проходить через початок координат.

254. Дано пряму $2x - y + 4 = 0$ і точку $A(1;\ 1)$. Через точку A проведено пряму, паралельну даній, і пряму, перпендикулярну до даної. Складіть рівняння цих прямих.

255. Доведіть методом координат, що паралелограм, який має рівні діагоналі, є прямокутником.

256. Доведіть методом координат, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

257. Доведіть методом координат, що середня лінія трапеції паралельна її основам.

258. Складіть рівняння ГМТ:
а) рівновіддалених від початку координат і точки (–4; 2);
б) сума квадратів відстаней від яких до точок (–1; 0) і (1; 0) дорівнює 12.

259. Складіть рівняння ГМТ, різниця квадратів відстаней від яких до точок (1; 0) і (–1; 2) дорівнює 1.

Рівень Б

260. Складіть рівняння прямої, яка:
а) нахилена до додатної півосі осі абсцис під кутом 60° і проходить через точку (0; 1);
б) нахилена до додатної півосі осі абсцис під кутом 135° і проходить через точку (0; –1).

261. Складіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 = 25$ у точках (3; 4) і (–3; –4). Доведіть, що ці дотичні паралельні.

262. Три сторони квадрата лежать на прямих $3x + y + 1 = 0$, $3x + y - 9 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$. Складіть рівняння прямої, на якій лежить четверта сторона квадрата. Скільки розв'язків має задача?

263. До стіни вертикально приставлено драбину. На середній сходинці драбини сидить кішка. Хлопець починає рухати драбину так, що один її кінець переміщується прямолінійно по землі, а інший — вертикально вниз уздовж стіни. По якій траєкторії рухатиметься кішка, якщо вона весь час сидітиме посередині драбини? Застосуйте для розв'язування задачі метод координат.

264. Пряма віддалена від центра кола радіуса R на відстань d. Дослідіть взаємне розміщення кола і прямої залежно від значень d і R.

265. Відстань між центрами кіл з радіусами R і r дорівнює d. Дослідіть взаємне розміщення кіл залежно від значень d, R і r.

Рівень В

266 (опорна). *Рівняння прямої, що проходить через точки* $(x_1; y_1)$ *і* $(x_2; y_2)$, *має вигляд* $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Доведіть.

267 (опорна). *Прямі* $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ *і* $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ *перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли* $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Доведіть.

268. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють відповідно $a\sqrt{2}$ і $a\sqrt{3}$. Доведіть, що медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні.

269. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 2a$, $AD = 5a$. На стороні AD позначено точку K так, що $AK = a$. Доведіть, що $BK \perp KC$.

270. На колі радіуса R позначено точку A. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд даного кола, які виходять із точки A.

271. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

Повторення перед вивченням § 9

Теоретичний матеріал

- аксіома вимірювання відрізків; 7 клас, п. 2.2
- рівні фігури. 7 клас, п. 7.2

Задачі

272. Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ перетинаються в точці O. Доведіть рівність трикутників AOB і DOC.

273. Вершини трикутника ABC мають координати $A(-2;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$, $C(1;\ 4)$. Знайдіть на координатній площині точку D таку, що:

а) $\triangle ABC = \triangle ADC$; б) $\triangle ABC = \triangle CDA$.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 2

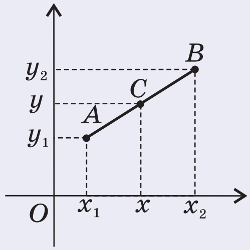
1. Відрізок BD — медіана трикутника ABC. Знайдіть координати вершини C, якщо $A(-1;\ 7)$, $D(3;\ 1)$.
2. Точки $A(-3;\ -1)$ і $B(5;\ 5)$ — кінці діаметра кола. Знайдіть радіус цього кола.
3. Складіть рівняння кола з центром $(3;\ -4)$, яке проходить через початок координат.
4. Знайдіть точки перетину прямої $2x - 5y + 20 = 0$ з осями координат.
5. Визначте, чи є відрізок AB діаметром кола $x^2 + 6x + y^2 = 0$, якщо $A\left(-1; \sqrt{5}\right)$, $B\left(-5; -\sqrt{5}\right)$.
6. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, якщо $A(-2;\ 0)$, $B(4;\ 3)$, $C(5;\ 1)$, $D(-1;\ -2)$.

Онлайн-тестування

Підсумки розділу II

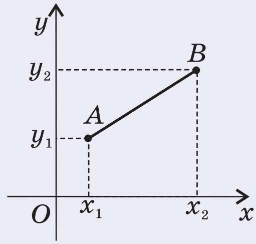
НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ Й РІВНЯННЯ ФІГУР У КООРДИНАТАХ

Координати середини відрізка



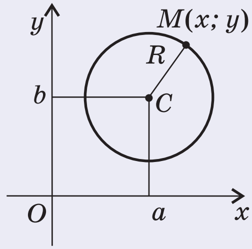
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Відстань між точками



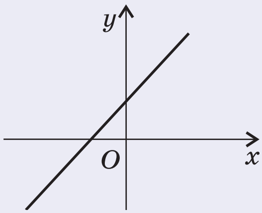
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Рівняння кола



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

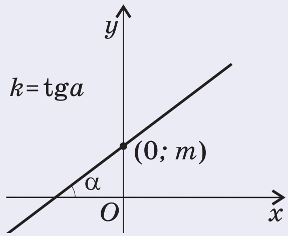
Рівняння прямої



$$ax + by + c = 0$$

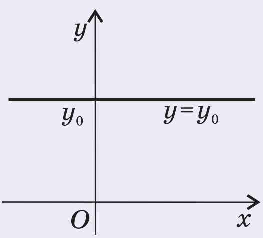
(a і b не дорівнюють нулю одночасно)

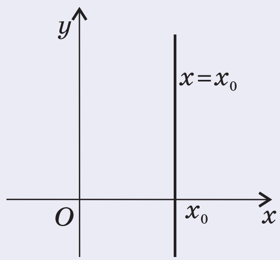
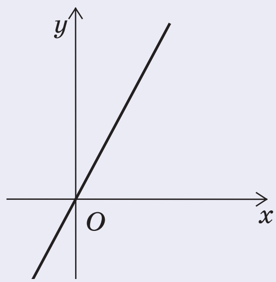
Рівняння невертикальної прямої

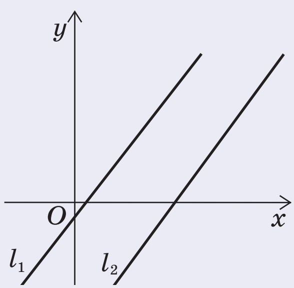
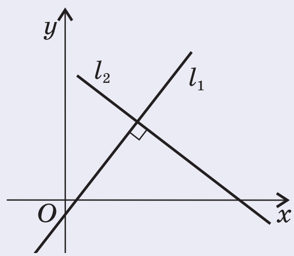


$$y = kx + m, \; k = \text{tg}\,\alpha$$

ОКРЕМІ ВИПАДКИ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Графічне подання	Значення коефіцієнтів та вигляд рівняння	Особливості розміщення
	$a = 0$, $b \neq 0$. $by + c = 0$ або $y = y_0$, де $y_0 = -\frac{c}{b}$ — деяке число	Пряма паралельна осі абсцис або збігається з нею. *Рівняння осі абсцис* $y = 0$

ОКРЕМІ ВИПАДКИ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ		
Графічне подання	Значення коефіцієнтів та вигляд рівняння	Особливості розміщення
	$a \neq 0,\ b = 0.$ $ax + c = 0$, або $x = x_0$, де $x_0 = -\dfrac{c}{a}$ — деяке число	Пряма паралельна осі ординат або збігається з нею. *Рівняння осі ординат* $x = 0$
	$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0.$ $ax + by = 0$, або $y = kx$, де $k = -\dfrac{a}{b}$ — деяке число	Пряма проходить через початок координат

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У СИСТЕМІ КООРДИНАТ	
Критерій паралельності прямих у системі координат	Критерій перпендикулярності прямих у системі координат
Прямі l_1 і l_2, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$ 	Прямі l_1 і l_2, задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$ відповідно, перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$ 

Контрольні запитання до розділу II

1. Опишіть прямокутну систему координат на площині.
2. Доведіть формули координат середини відрізка.
3. Доведіть формулу відстані між двома точками.
4. Запишіть рівняння кола у прямокутній системі координат.
5. Запишіть рівняння прямої у прямокутній системі координат.

Додаткові задачі до розділу II

274. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, причому $A(-3; -1)$, $B(0; 4)$, $O(2; 1)$. Знайдіть координати вершин C і D.

275. Доведіть, що:
а) сума абсцис середин сторін трикутника дорівнює сумі абсцис його вершин;
б) точка перетину медіан трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, збігається з точкою перетину медіан даного трикутника.

276. На осі ординат знайдіть точку, відстань від якої до точки $A(1; 3)$ удвічі менша, ніж до точки $B(2; -3)$.

277. Дано точки $A(-3; 1)$ і $B(7; 1)$. Складіть рівняння геометричного місця точок C таких, що трикутник ABC:
а) прямокутний з гіпотенузою AB;
б) прямокутний з катетом AB.

278. Коло дотикається до осей координат, а його центр лежить у другій координатній чверті й віддалений від початку координат на $2\sqrt{2}$. Складіть рівняння цього кола.

279. Вершини трикутника ABC мають координати $A(2; -6)$, $B(4; 2)$, $C(0; -4)$. Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трикутника, паралельну стороні AC.

280. Доведіть, що прямі $ax + 2y - 6 = 0$ і $bx - y + 5 = 0$ перетинаються за умови $a + 2b \neq 0$.

281. Складіть рівняння прямої, яка перетинає коло $x^2 + y^2 = 25$ у точках з абсцисами -4 і 3 та вісь Oy у точці з найбільшою із можливих ординатою.

Задачі підвищеної складності

282. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки (3; 0) і (–1; 2), якщо центр кола лежить на прямій $x - y + 2 = 0$.

283. Знайдіть відстань від початку координат до прямої $3x + 2y - 13 = 0$.

284. Складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами (3; –7), (8; –2) і (6; 2).

285 (опорна). *Відстань від точки* $M\left(x_0;\, y_0\right)$ *до прямої* $ax + by + c = 0$ *визначають за формулою* $d = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Доведіть.

286. Знайдіть усі значення k, за яких пряма $y = kx + 5$ віддалена від початку координат на 3 одиниці.

287. Точка M — точка перетину медіан трикутника ABC, причому $A(-1;\, 2)$, $B(2;\, 3)$, $M\,(1;\, 2)$. Знайдіть координати вершини C.

288. Навколо рівностороннього трикутника зі стороною a описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника дорівнює $2a^2$.

289. На площині позначено точки A і B. Доведіть, що геометричним місцем точок M, для яких $\dfrac{MA}{MB} = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$), є коло із центром на прямій AB *(коло Аполлонія)*.

Історична довідка

Рене Декарт

Розвиток торгівлі й мореплавання, зростання промисловості й техніки, що відбувались у XVII ст., сприяли виникненню нових математичних ідей і методів, які відповідали вимогам часу. Одним із провідників цих ідей був Рене Декарт (1596–1650) — видатний французький учений і філософ. Широта інтересів цієї людини вражає: окрім математики, він збагатив своїми відкриттями астрономію, фізику, біологію, медицину. Але універсальною наукою, здатною пояснити всі явища реального світу, Декарт вважав філософію. Він став засновником власного філософського вчення — картезіанства (Картезій — латинізоване прізвище Декарта), в якому викладено погляд на розвиток природничих наукових теорій.

Біографія Декарта є взірцем самовідданого служіння науці й боротьби за свободу думки. Зазнавши утисків на батьківщині, у 1629 р. Декарт змушений був переїхати до Голландії. Саме там у 1637 р. вперше побачив світ його головний твір — «Міркування про метод, що дозволяє спрямовувати розум і відшукувати істину в науках». У цій роботі Декарт виклав чотири основні принципи наукового пізнання: 1) ніколи не сприймати за істину те, що є недостатньо обґрунтованим; 2) ділити кожну проблему на частини, щоб розв'язувати її послідовно; 3) рухатися в процесі пізнання від найпростішого до більш складного; 4) супроводжувати дослідження переліками й оглядами, щоб нічого не пропустити. «Міркування про метод...» мало три додатки: «Діоптрика», «Метеори» та «Геометрія». Саме в останньому викладено метод координат, який пізніше склав основу аналітичної геометрії. Цікаво, що в цій роботі Декарт уперше запропонував сучасні позначення змінних і степенів, а також першим став подавати рівняння у вигляді, коли в правій частині стоїть нуль. «Геометрія» ще за життя автора мала чотири перевидання і стала настільною книгою математиків того часу.

Пам'ятник Рене Декарту в Гаазі

Математичні олімпіади

Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004)

Як виявляється математичний талант дитини? Чи можливе це в умовах масової школи? Чи дійсно серед переможців математичних олімпіад трапляються майбутні видатні вчені та педагоги? Відповіді на ці запитання можна знайти в біографії знаного математика та організатора математичного олімпіадного руху в Україні М. Й. Ядренка.

Михайло Йосипович Ядренко народився в Чернігівській області, у селі Дрімайлівка неподалік Ніжина. За власними спогадами, підручниками юного Михайла були буквар та «Кобзар» Т. Г. Шевченка. Уже в 9 класі Михайло вирішує стати математиком. У 1950 році він пише листа до Київського державного університету з проханням допустити його до участі в міській олімпіаді. Юнак отримує запрошення, приїжджає до Києва, розв'язує чотири задачі з п'яти та отримує друге місце! Але сам Михайло їде незадоволений тим, що не все розв'язав...

Згодом він закінчує школу із золотою медаллю і вступає на механіко-математичний факультет Київського університету ім. Т. Г. Шевченка. Тут повною мірою розкрився талант ученого. Блискучий захист кандидатської та докторської дисертацій, завідування кафедрою

теорії ймовірностей та математичної статистики, створення нових математичних теорій та підручників — ось далеко не всі надбання цієї надзвичайної людини.

Михайло Йосипович Ядренко відомий як чудовий педагог. Його лекції вирізнялися математичною чіткістю, логічною послідовністю, високим науковим рівнем та разом із тим доступністю викладання матеріалу. Можна без перебільшення сказати, що значна частина відомих українських спеціалістів з теорії ймовірностей та математичної статистики познайомились із цими розділами математики на лекціях Ядренка.

Але Михайло Йосипович не забув, як саме математичні олімпіади підштовхнули його до серйозної науки. Він віддає багато сил та енергії розвиткові шкільної математичної освіти в Україні, організації математичних олімпіад, виданню сучасних посібників з елементарної математики, а також збірників задач із математичних олімпіад. У 1968 році Ядренко заснував періодичний науково-популярний збірник «У світі математики», який з 1995 року перетворився на унікальний науково-популярний журнал.

Понад 40 років Михайло Йосипович був постійним організатором шкільних математичних олімпіад різного рівня та математичних гуртків, з 1970 року очолював журі Всеукраїнських учнівських олімпіад. Для роботи у складі журі він залучав спочатку своїх друзів-математиків, пізніше — колишніх «олімпіадників», провідних науковців — палких ентузіастів олімпіадного руху.

Багато років Ядренко виступав з лекціями для учнівства на українському телебаченні, був керівником Всеукраїнської заочної фізико-математичної олімпіади. Наказом Міністерства освіти і науки України у 2010 році Всеукраїнським турнірам юних математиків присвоєно ім'я видатного вченого і педагога, фундатора вітчизняної системи роботи з математично обдарованими дітьми, члена-кореспондента Академії наук України М. Й. Ядренка.

Готуємось до ДПА

Тест 2

Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. Точка $(-2;\ 1)$ належить...

А осі абсцис.
Б осі ординат.
В першій координатній чверті.
Г другій координатній чверті.

2. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо $A(0;\ -3)$, $B(8;\ -5)$.

А $(8;\ -8)$ Б $(4;\ -4)$ В $(8;\ -1)$ Г $(4;\ -1)$

3. Знайдіть відстань між точками $A(2;\ -3)$ і $B(-1;\ 1)$.

А 4 Б 5 В 6 Г 10

4. Серед наведених рівнянь укажіть рівняння кола із центром $(-2;\ 1)$ і радіусом 4.

А $(x+2)^2+(y-1)^2=16$
Б $(x+2)^2+(y-1)^2=4$
В $(x-2)^2+(y+1)^2=16$
Г $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

5. Пряма, задана рівнянням $ax+by+c=0$, паралельна осі ординат. Серед наведених рівностей укажіть правильну.

А $a=0$ Б $b=0$ В $c=0$ Г $a=b$

6. Середина відрізка з кінцями в точках $A(3;\ -3)$ і $B(1;\ m)$ лежить на осі абсцис. Знайдіть m.

А 2 Б 3 В 1 Г 0

7. Серед наведених рівнянь укажіть рівняння прямої, яка проходить через центр кола $x^2+y^2=16$.

А $2x-3y=0$ Б $3x-8=0$ В $x+2y+3=0$ Г $3y+12=0$

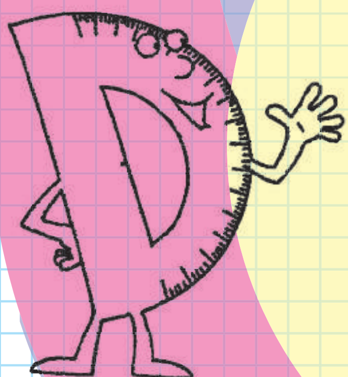
8. Скільки спільних точок з осями координат має коло, задане рівнянням $(x-1)^2+(y+1)^2=2$?

А Жодної Б Чотири В Дві Г Три

9. Серед наведених рівнянь укажіть рівняння прямої, яка є дотичною до кола $x^2+(y-1)^2=9$.

А $y+3=0$ Б $y+4=0$ В $x-4=0$ Г $x+3=0$

Розділ III
Геометричні переміщення



Геометрія є прообразом краси світу.

Йоганн Кеплер, німецький астроном і математик

Уявіть собі, що ви кидаєте камінець у плесо тихого ставка і по воді колами розбігаються хвилі, причому центр кожного кола розміщений саме там, де камінець торкнувся води. А тепер підніміть переднє колесо велосипеда і покрутіть його — колесо не зрушить із місця, але його спиці закружляють у шаленому танці. Станьте перед дзеркалом, тримаючи в правій руці олівець — і дзеркало «перетворить» вас на лівшу, адже ваш двійник триматиме олівець у лівій руці. У шухляді вашого столу лежить косинець: ви трохи висунули шухляду — і косинець перемістився разом із нею. Так чи інакше, в кожному з цих випадків фігури, про які йдеться, зазнають певних змін, перетворень.

Ідея перетворень є однією з провідних ідей сучасної математики. За її допомогою з успіхом доводять складні твердження з різних розділів геометрії, які виходять далеко за межі шкільного курсу. За допомогою геометричних перетворень і комп'ютерної графіки кінематографісти захоплюють уяву глядача дивовижними образами і незвичайними перевтіленнями на екрані. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, а хімікам і фізикам — досліджувати структуру кристалів.

У цьому розділі ми розглянемо основні види геометричних перетворень на площині.

§ 9 Переміщення. Рівність фігур

9.1. Поняття про геометричне перетворення

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок: наприклад, на площині коло є множиною всіх точок, рівновіддалених від даної точки. Крім того, між точками двох геометричних фігур можна встановлювати відповідності.

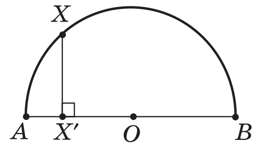


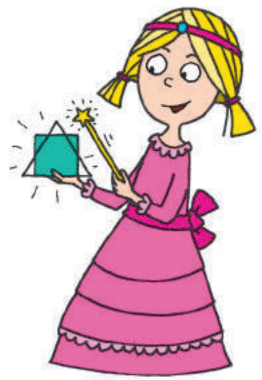
Рис. 42. Відповідність між точками півкола і діаметра

Розглянемо півколо з центром O і діаметром AB (рис. 42). З довільної точки півкола проведемо перпендикуляр до прямої AB і вважатимемо, що кожній точці півкола X відповідає точка X' — основа перпендикуляра, проведеного з точки X до прямої AB. За теоремою про існування і єдиність перпендикуляра до прямої кожній точці півкола в такому разі відповідатиме єдина точка діаметра AB, і навпаки: кожній точці діаметра поставлена у відповідність єдина точка півкола. Крім того, різним точкам півкола відповідають різні точки діаметра AB (точки A і B, які відповідають самі собі, належать як півколу, так і діаметру). У такому випадку кажуть, що встановлена відповідність є *перетворенням* півкола в діаметр.

Означення

Перетворенням фігури F у фігуру F' називається така відповідність, за якої:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F';
2) кожній точці фігури F' відповідає певна точка фігури F;
3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F'.



Фігура F' називається образом фігури F при даному перетворенні.

У шкільному курсі геометрії докладно розглядаються такі геометричні перетворення, які залишають незмінними форму та розміри фігури — переміщення.

9.2. Переміщення та його властивості

Означення

Переміщенням (або рухом) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками цієї фігури.

Це означає: якщо фігура F' є образом фігури F, отриманим унаслідок переміщення, то будь-які дві точки X і Y фігури F переходять у точки X' і Y' фігури F' так, що $XY = X'Y'$ (рис. 43).

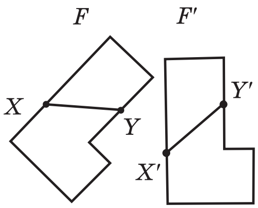


Рис. 43. До означення переміщення

Зауважимо, що поняття переміщення (руху) зустрічається й у фізиці, але там воно має інший зміст. Фізичний рух характеризується траєкторією, швидкістю тощо. Натомість у геометрії мають значення лише початкове й кінцеве положення фігури.

Сформулюємо деякі властивості переміщення.

Очевидно, що коли фігуру F' отримано деяким переміщенням фігури F, а фігуру F'' — іншим переміщенням фігури F', то відстані між відповідними точками фігур F, F' і F'' рівні, тобто два послідовні переміщення знову дають переміщення.

Якщо певне перетворення переводить фігуру F у фігуру F', то існує перетворення, яке переводить фігуру F' у фігуру F. Таке перетворення називають оберненим до даного. Якщо дане перетворення зберігає відстань між точками, то обернене також має цю властивість. Це означає, що перетворення, обернене до переміщення, також є переміщенням.

Доведемо основну властивість переміщення.

Теорема (основна властивість переміщення)

Унаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається.

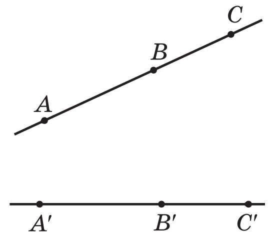


Рис. 44. До доведення основної властивості переміщення

Доведення

□ Нехай на прямій AC точка B лежить між точками A і C, а точки A', B' і C' — образи точок A, B і C, отримані в результаті переміщення (рис. 44). Доведемо, що точка B' лежить на прямій $A'C'$ між точками A' і C'.

Якщо точка B лежить між точками A і C, то за аксіомою вимірювання відрізків $AC = AB + BC$. За означенням переміщення $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, отже, $A'C' = A'B' + B'C'$. За наслідком з нерівності трикутника це означає, що точка B' лежить на прямій $A'C'$ між точками A' і C', тобто точки A', B' і C' лежать на одній прямій. Теорему доведено. ■

Наслідок 1

Унаслідок переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

Наслідок 2

Унаслідок переміщення зберігаються кути між променями.

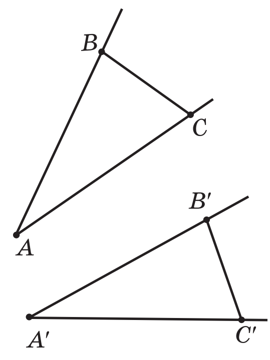


Рис. 45

Справді, нехай промені AB і AC, що не лежать на одній прямій, унаслідок переміщення переходять у промені $A'B'$ і $A'C'$ відповідно (рис. 45). Оскільки відстані між точками внаслідок переміщення зберігаються, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ за трьома сторонами. Отже, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, тобто градусні міри кутів унаслідок переміщення зберігаються.

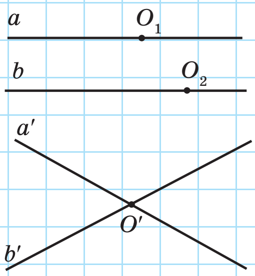


Рис. 46

Задача

Доведіть, що внаслідок переміщення паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

Розв'язання

Нехай унаслідок переміщення паралельні прямі a і b переходять у прямі a' і b' відповідно. Доведемо від супротивного, що $a' \parallel b'$.

Нехай прямі a' і b' перетинаються в деякій точці O' (рис. 46). На прямій a існує точка O_1, а на прямій b — точка O_2, такі, що внаслідок переміщення обидві ці точки переходять у точку O'. Оскільки точки O_1 і O_2 лежать на паралельних прямих, то відстань між ними не дорівнює нулю. Але відстань між їхніми образами дорівнює нулю, що суперечить означенню переміщення. Отже, наше припущення хибне, тобто $a' \parallel b'$.

Нагадаємо, що дві фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються накладанням, причому поняття накладання вводилося на наочних прикладах.

Введення геометричних перетворень, зокрема переміщення, дозволяє ототожнити накладання фігури F на фігуру F' із переміщенням, під час якого фігура F переходить у фігуру F'.

Теорема (про зв'язок переміщення і накладання)

Будь-яке накладання є переміщенням, і навпаки: будь-яке переміщення є накладанням.

Обґрунтування цих тверджень надано в Додатку 2.

Наслідок

Рівні фігури переводяться одна в одну переміщенням, і навпаки: внаслідок переміщення будь-яка фігура переходить у рівну їй фігуру.

Таким чином, можна дати таке означення рівних фігур.

Означення

Дві фігури називаються рівними, якщо вони суміщаються переміщенням.

Запитання і задачі

Усні вправи

290. Чи може переміщення переводити:
   а) сторону паралелограма в протилежну його сторону;
   б) одну з основ трапеції в іншу;
   в) один із кутів при основі рівнобедреного трикутника в інший;
   г) один із кутів різностороннього трикутника в інший?

291. Відрізок AC і його середина B внаслідок переміщення переходять у відрізок $A'C'$ і точку B' відповідно. Знайдіть довжину відрізка $A'C'$, якщо $AB = 20$ см.

292. Під час переміщення чотирикутника $ABCD$ отримали квадрат $A'B'C'D'$. Визначте довжину діагоналі BD, якщо $A'C' = 4$ см.

293. Трикутник $A'B'C'$ є образом рівностороннього трикутника ABC, отриманим у результаті переміщення. Визначте кути трикутника $A'B'C'$.

Графічні вправи

294. Накресліть два кола зі спільним центром O. Опишіть геометричне перетворення, яке переводить менше коло в більше. Чи є таке перетворення переміщенням?

295. Накресліть прямокутник $ABCD$ і позначте точку O перетину його діагоналей. Опишіть геометричне перетворення, яке переводить трикутник AOB у трикутник DOC. Чи є це перетворення переміщенням?

Письмові вправи

Рівень А

296. Точки A, B і C не лежать на одній прямій і під час переміщення переходять у точки A', B' і C' відповідно. Доведіть рівність трикутників ABC і $A'B'C'$.

297. Доведіть, що внаслідок переміщення суміжні кути переходять у суміжні кути.

298. Доведіть, що внаслідок переміщення вертикальні кути переходять у вертикальні кути.

299. Унаслідок переміщення різносторонній трикутник ABC переходить у трикутник MNK, причому $\angle A = \angle N$, $\angle B = 70°$, $\angle M = 20°$. Знайдіть кути N і K.

300. Трикутник MNK — образ трикутника ABC, отриманий у результаті переміщення. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $AB = BC$, а найбільший кут трикутника MNK дорівнює $100°$.

Рівень Б

301. Доведіть, що внаслідок переміщення подібні трикутники переходять у подібні трикутники.

302. Доведіть, що коли образом даного чотирикутника, отриманим унаслідок переміщення, є трапеція, то даний чотирикутник також є трапецією.

303. Доведіть, що внаслідок переміщення паралелограм переходить у паралелограм.

304. Унаслідок переміщення ромб $ABCD$ переходить у чотирикутник $A'B'C'D'$. Знайдіть кути отриманого чотирикутника, якщо $AB = AC$.

305. Унаслідок переміщення чотирикутник $ABCD$ переходить у чотирикутник $A'B'C'D'$. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $A'D' \parallel B'C'$, $A'B' = C'D'$, $\angle B' = 140°$ (розгляньте два випадки).

Рівень В

306. Унаслідок переміщення фігури F_1 і F_2 та їхня спільна точка O переходять у фігури F_1' і F_2' та точку O' відповідно. Доведіть, що точка O' — спільна точка фігур F_1' і F_2'.

307. Доведіть ознаку рівності паралелограмів за двома діагоналями і кутом між ними.

308. Доведіть, що внаслідок переміщення коло переходить у коло з тим самим радіусом.

309. Сформулюйте і доведіть будь-яку ознаку рівності ромбів.

Повторення перед вивченням § 10

Теоретичний матеріал

- паралелограм та його властивості; 8 клас, § 2
- види трикутників; 7 клас, § 16
- види чотирикутників. 8 клас, § 4, 5

Задачі

310. Доведіть, що відрізок, який має кінці на сторонах паралелограма і проходить через точку перетину діагоналей, ділиться цією точкою навпіл.

311. Відрізок із кінцями на бічних сторонах рівнобедреного трикутника, перпендикулярний до висоти, проведеної до основи, ділиться цією висотою навпіл. Доведіть.

§ 10 Симетрії відносно точки і прямої

Симетрія — від грецького «симетріа» — узгодженість розмірів, однаковість у розміщенні частин.

10.1. Симетрія відносно точки

Нехай O — фіксована точка, X — довільна точка площини (рис. 47). Відкладемо на промені XO відрізок OX', який дорівнює XO. Ми отримали точку X', симетричну точці X відносно точки O.

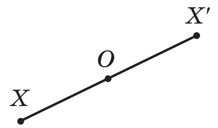


Рис. 47. Точки X і X' симетричні відносно точки O

Означення

Точки X і X' називаються *симетричними відносно точки* O, якщо точка O — середина відрізка XX'.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X' відносно точки O, є точка X. Точка O вважається симетричною самій собі і називається *центром симетрії.*

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно точки O називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну точці X відносно точки O (рис. 48). При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно точки O.*

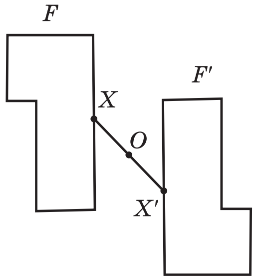


Рис. 48. Фігури F і F' симетричні відносно точки O

Симетрію відносно точки називають також *центральною симетрією.*

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *центрально-симетричною*, а точка O — *центром симетрії фігури F.*

Наприклад, точка перетину діагоналей паралелограма є центром симетрії паралелограма (рис. 49), оскільки центральна симетрія відносно цієї точки переводить паралелограм у себе (відповідна опорна задача розглядалася у 8 класі).

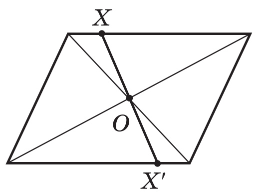


Рис. 49. Точка перетину діагоналей — центр симетрії паралелограма

Теорема (основна властивість центральної симетрії)

Центральна симетрія є переміщенням.

Доведення

□ Нехай унаслідок центральної симетрії відносно точки O точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно. Розглянемо загальний випадок (рис. 50), коли точки O, X і Y не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно). Трикутники XOY і $X'OY'$ рівні за першою ознакою ($XO = X'O$ і $YO = Y'O$ за означенням центральної симетрії, $\angle XOY = \angle X'OY'$ як вертикальні), отже, $XY = X'Y'$. Таким чином, центральна симетрія зберігає відстань між точками, отже, є переміщенням. ■

Із доведеної теореми випливає, що **центральна симетрія має всі властивості переміщення.**

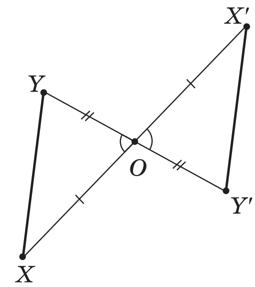


Рис. 50. До доведення основної властивості центральної симетрії

Задача

Доведіть, що центральна симетрія переводить пряму в паралельну пряму або в себе.

Розв'язання

Нехай дано точку O і пряму a. Розглянемо спочатку випадок, коли точка O не лежить на даній прямій (рис. 51, *а*). Оскільки центральна симетрія є переміщенням, то за основною властивістю переміщення центральна симетрія відносно точки O переводить пряму a в деяку пряму a'. Нехай точки X' і Y' прямої a' — образи точок X і Y прямої a. Тоді $\triangle XOY = \triangle X'OY'$ за першою ознакою, звідки $\angle OXY = \angle OX'Y'$. Ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих a і a' та січній XX'. Отже, за ознакою паралельності прямих $a \parallel a'$.

У випадку, коли точка O лежить на прямій a (рис. 51, *б*), симетрія відносно цієї точки переводить довільну точку X у точку X' прямої a, а саму точку O — у себе. Отже, пряма a' — образ прямої a — проходить через точки O і X'. А оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму, то пряма a' збігається з прямою a. Таким чином, симетрія відносно точки O переводить пряму a в себе.

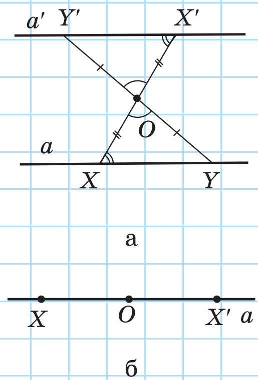


Рис. 51

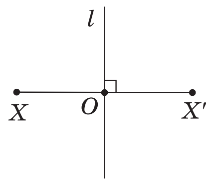


Рис. 52. Точки X і X' симетричні відносно прямої l

Цікаво, що пряма є центрально-симетричною фігурою, причому центром симетрії прямої є будь-яка її точка (доведіть це самостійно). Як правило, геометричні фігури мають не більш ніж один центр симетрії.

10.2. *Симетрія відносно прямої*

Нехай на площині зафіксовано пряму l і позначено довільну точку X (рис. 52). Проведемо з точки X перпендикуляр XO до прямої l і відкладемо на промені XO відрізок OX', який дорівнює XO. Ми отримали точку X', симетричну точці X відносно прямої l.

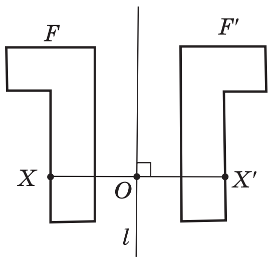


Рис. 53. Фігури F і F' симетричні відносно прямої l

Означення

Точки X і X' називаються симетричними відносно прямої l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину.

Очевидно, що точкою, симетричною точці X' відносно прямої l, є точка X. Точки прямої l вважаються симетричними самі собі. Пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка XX' і називається *віссю симетрії*.

Перетворенням симетрії (симетрією) відносно прямої l називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну X відносно прямої l (рис. 53). При цьому фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої* l.

Симетрію відносно прямої називають також *осьовою симетрією*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *симетричною відносно прямої* l, а сама пряма l — *віссю симетрії фігури* F.

Наприклад, віссю симетрії рівнобедреного трикутника ABC є пряма, що проходить через вершину B перпендикулярно до основи AC (рис. 54), бо симетрія відносно цієї прямої переводить даний трикутник у себе (доведіть це самостійно).

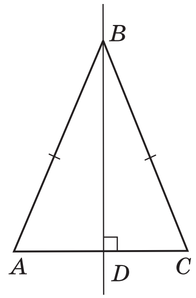


Рис. 54. Пряма BD — вісь симетрії рівнобедреного трикутника ABC

Теорема (основна властивість осьової симетрії)

Осьова симетрія є переміщенням.

Доведення

□ Нехай унаслідок осьової симетрії відносно прямої l точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно. Введемо систему координат так, щоб пряма l збіглася з віссю Oy (рис. 55). Тоді внаслідок симетрії відносно цієї прямої точки $X(x_1;\ y_1)$ і $Y(x_2;\ y_2)$ перейдуть у точки $X'(-x_1;\ y_1)$ і $Y'(-x_2;\ y_2)$ відповідно. За формулою відстані між точками маємо: $XY=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$,

$$X'Y'=\sqrt{\left(-x_2-(-x_1)\right)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

отже, $XY=X'Y'$.

Таким чином, осьова симетрія зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Теорему доведено. ■

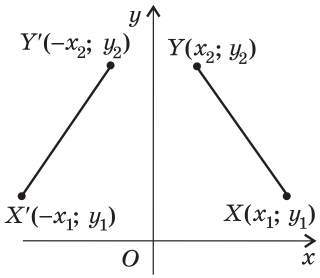


Рис. 55. До доведення основної властивості осьової симетрії

Із доведеної теореми випливає, що осьова симетрія має всі властивості переміщення.

Задача

Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є віссю його симетрії.

Розв'язання

Нехай пряма l містить бісектрису даного кута BAC (рис. 56). Позначимо на стороні AB цього кута довільну точку X. Оскільки осьова симетрія є переміщенням, вона переводить промінь AB у деякий промінь AB', а точку X — у точку X' променя AB'. Нехай O — точка перетину відрізка XX' з прямою l. Прямокутні

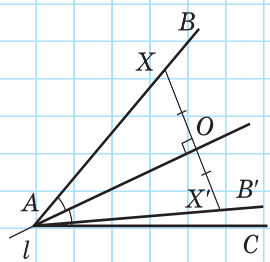


Рис. 56

трикутники AOX і AOX' рівні за двома катетами, звідки $\angle OAX = \angle OAX'$. Але за аксіомою відкладання кутів кут OAX' має збігатися з кутом OAC, отже, промінь AB' збігатиметься з променем AC. Оскільки X — довільна точка променя AB, то під час симетрії відносно прямої l промінь AB переходить у промінь AC. Таким чином, пряма l — вісь симетрії кута BAC.

Запитання і задачі

Усні вправи

312. Симетрія відносно точки O переводить точку A в точку B. Де розміщена точка O?

313. Унаслідок симетрії відносно точки O точки A і B переходять у точки A' і B' відповідно. Серед рівностей *а*–*г* виберіть рівність, яка не обов'язково справджується:
а) $AB = A'B'$; б) $AO = A'O$; в) $AO = BO$; г) $BO = B'O$.

314. Які прямі під час центральної симетрії переходять самі в себе?

315. Які з фігур на рис. 57 мають центр симетрії? Де він розміщений?

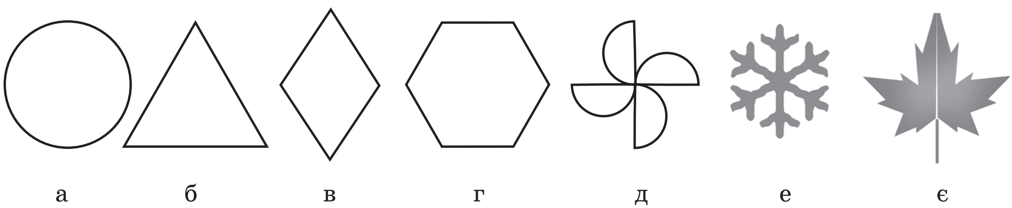


Рис. 57

316. Симетрія відносно прямої l переводить точку A в точку B. Як розміщені прямі l і AB?

317. Унаслідок симетрії відносно прямої l відрізок AB, кінці якого не лежать на прямій l, переходить у відрізок $A'B'$. Серед тверджень *а*–*г* оберіть твердження, яке не обов'язково справджується:
а) $AB = A'B'$; б) $AA' \perp l$; в) $AA' \parallel BB'$; г) $AB \parallel A'B'$.

318. Скільки осей симетрії має відрізок; пряма? Для кожної із цих фігур опишіть взаємне розміщення осей симетрії.

319. Які з фігур на рис. 57 мають осі симетрії? Скільки осей симетрії має кожна фігура? Як вони розміщені?

320. Наведіть приклад фігури, яка:
а) не має ні центра, ні осей симетрії;
б) має центр симетрії, але не має осей симетрії;
в) не має центра симетрії, але має вісь симетрії;
г) має центр симетрії і декілька (безліч) осей симетрії.

Графічні вправи

321. Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник $AB'C'$, симетричний трикутнику ABC відносно точки A. Визначте вид чотирикутника $CBC'B'$.

322. Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте квадрат, симетричний даному квадрату відносно середини сторони CD. Скільки вершин даного квадрата є також вершинами його образу?

323. На мапі України побудуйте відрізок, кінцями якого є міста Львів і Харків. Знайдіть центр симетрії цього відрізка. У якій області розташована знайдена точка? Поблизу якого великого населеного пункту?

324. На мапі України побудуйте пряму, відносно якої Львів та Івано-Франківськ є симетричними. Які області перетинає ця пряма?

325. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Побудуйте трикутник $AB'C$, симетричний трикутнику ABC відносно прямої AC. Знайдіть точку O, внаслідок симетрії відносно якої трикутник ABC переходить у трикутник $AB'C$.

326. Накресліть гострий кут ABC. Побудуйте кут ABC', симетричний куту ABC відносно прямої AB. У якому відношенні промінь AB ділить кут $C'AC$?

327. Накресліть прямокутник $ABCD$ і проведіть осі його симетрії. Сполучіть послідовно точки перетину цих осей зі сторонами прямокутника. Яку фігуру ви отримали? Чи є осі симетрії прямокутника осями симетрії отриманої фігури?

328. Накресліть рівносторонній трикутник і проведіть осі його симетрії. Чи буде точка їхнього перетину центром симетрії цього трикутника?

Письмові вправи

Рівень А

329. Знайдіть точку, симетричну:
   а) точці (2; 9) відносно початку координат;
   б) точці (2; –7) відносно точки (1; 1);
   в) точці $O(0; 0)$ відносно точки перетину прямих $x = -2$ і $y = 3$.

330. Знайдіть точку, симетричну:
   а) точці (2; 9) відносно точки (–1; 3);
   б) точці $(a; b)$ відносно початку координат.

331. Доведіть, що центр (точка, рівновіддалена від вершин) рівностороннього трикутника не є центром його симетрії. Чи може промінь мати центр симетрії? Відповідь обґрунтуйте.

332. Доведіть, що центр кола є центром його симетрії.

333. Знайдіть точку, симетричну:
   а) точці (–3; 9) відносно осі ординат;
   б) точці (–2; –5) відносно осі абсцис;
   в) початку координат відносно прямої $x = 4$.

334. Знайдіть точку, симетричну точці $(a; b)$ відносно:
   а) осі абсцис; б) осі ординат.

335. Складіть рівняння прямої, симетричної прямій $y = x$ відносно:
   а) осі абсцис; б) осі ординат; в) початку координат.

336. Знайдіть у навколишньому світі предмети, що мають центр симетрії, вісь симетрії, декілька осей симетрії.

Рівень Б

337. Коло задане рівнянням $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Складіть рівняння кола, симетричного даному колу відносно:
   а) початку координат; б) точки (–1; 4).

338. Складіть рівняння прямої, симетричної:
   а) прямій $y = 8$ відносно точки (1; 3);
   б) прямій $y = -x + 1$ відносно початку координат.

339. Доведіть, що:
   а) жоден трикутник не має центра симетрії;
   б) трикутник, який має вісь симетрії, є рівнобедреним.

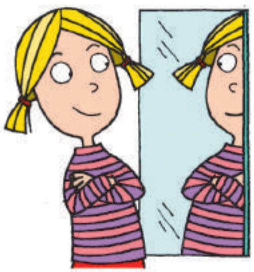
340. Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, є паралелограмом.

341. Складіть рівняння:
а) кола, симетричного колу $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ відносно прямої $x = -6$;
б) прямої, симетричної прямій $y = -2$ відносно прямої $y = x$.

342. Складіть рівняння:
а) кола, симетричного колу $x^2 + y^2 = 4$ відносно прямої $y = 3$;
б) прямої, симетричної осі абсцис відносно прямої $y = x$.

343. Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є осями його симетрії.

344. Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є осями його симетрії.



Рівень В

345. Доведіть, що жодна фігура не може мати рівно два центри симетрії.

346. Доведіть, що точка, симетрична точці $(a; b)$ відносно прямої $y = x$, має координати $(b; a)$.

347. Доведіть, що трапеція, яка має вісь симетрії, є рівнобічною. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

348. Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру гострокутного трикутника відносно його сторін, лежать на колі, описаному навколо трикутника.

349. Доведіть, що фігура, яка має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, має центр симетрії.

Повторення перед вивченням § 11

Теоретичний матеріал

- аксіоми відкладання відрізків і кутів; 7 клас, § 2, 3
- ознаки паралелограма. 8 клас, § 3

Задачі

350. Точка O — центр рівностороннього трикутника ABC. Доведіть рівність кутів AOB, BOC і AOC.

351. Дві вершини прямокутника лежать на осі абсцис, третя вершина має координати $(-4; -4)$, а точка $(0; -2)$ — точка перетину діагоналей прямокутника. Знайдіть координати решти вершин.

§ 11 Поворот і паралельне перенесення

11.1. Поворот

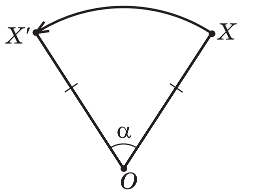


Рис. 58. Поворот точки X навколо точки O на кут α проти годинникової стрілки

Зафіксуємо на площині точку O та оберемо довільну точку X (рис. 58). Відкладемо від променя OX у заданому напрямі кут із заданою градусною мірою α і позначимо на другій стороні кута точку X' так, що $OX' = OX$. Такий перехід точки X у точку X' є **поворотом** навколо точки O на кут α.

Означення

Поворотом фігури F навколо точки O на кут α називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$.

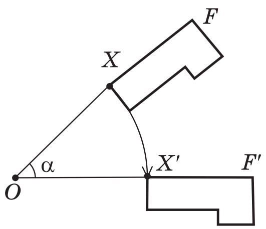


Рис. 59. Поворот фігури F навколо точки O на кут α за годинниковою стрілкою

Точку O називають *центром повороту*, а кут α — *кутом повороту**. Окрім центра й кута, поворот задається також **напрямом** — за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки.

Унаслідок повороту фігури F навколо точки O на кут α кожна точка X даної фігури зміщується по дузі кола із центром O і радіусом OX (рис. 59). Очевидно, що внаслідок будь-якого повороту положення центра повороту не змінюється.

Теорема (основна властивість повороту)

Поворот є переміщенням.

Доведення

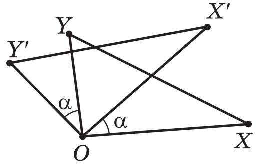
□ Розглянемо випадок, коли кут повороту менший від 180°. Нехай унаслідок повороту навколо точки O на кут α точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно. Розглянемо загальний випадок

* У шкільному курсі геометрії розглядатимуться кути повороту в межах від 0° до 360°.

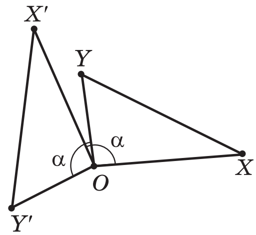
(рис. 60), коли точки O, X і Y не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно).

Трикутники XOY і $X'OY'$ рівні за першою ознакою: $OX = OX'$ і $OY = OY'$ за означенням повороту, $\angle XOY = \angle X'OY'$ (у випадку, поданому на рис. 60, кожен із цих кутів дорівнює сумі (рис. 60, *а*) або різниці (рис. 60, *б*) кута повороту α і кута $X'OY$). Із рівності трикутників випливає, що $XY = X'Y'$. Отже, поворот зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Випадки, коли $180° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, розгляньте самостійно. ■

З перетворенням повороту також пов'язаний певний вид симетрії. Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O на кут α $(0° < \alpha \leqslant 180°)$ фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має поворотну симетрію (або симетрію обертання). Наприклад, поворотну симетрію має рівносторонній трикутник: справді, він переходить у себе внаслідок повороту на кут 120° навколо точки O — центра даного трикутника (рис. 61).



а



б

Рис. 60. До доведення основної властивості повороту

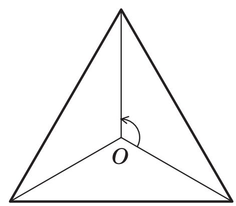


Рис. 61. Поворотна симетрія рівностороннього трикутника

11.2. Співнапрямлені промені. Паралельне перенесення

Про потяги або автомобілі, які рухаються один за одним або паралельними шляхами, наприклад, з Харкова до Києва, кажуть, що вони йдуть в одному напрямі. Геометричний відповідник цієї побутової ситуації дає поняття співнапрямленості.

Означення

Два промені називаються **співнапрямленими** (або **однаково напрямленими**), якщо виконується одна з двох умов:

1) дані промені паралельні й лежать по один бік від прямої, що проходить через їхні початкові точки;
2) дані промені лежать на одній прямій, причому один із них є частиною іншого.

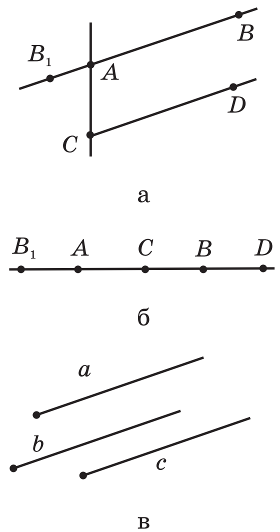


Рис. 62. Співнапрямлені і протилежно напрямлені промені

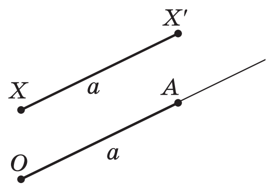


Рис. 63. Паралельне перенесення точки X у напрямі променя OA на відстань a

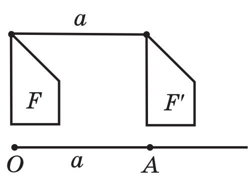


Рис. 64. Паралельне перенесення фігури F у напрямі променя OA на відстань a

На рис. 62, *а* промені AB і CD паралельні й лежать по один бік від прямої AC; на рис. 62, *б* промінь CD є частиною променя AB. В обох цих випадках промені AB і CD співнапрямлені. Зауважимо, що два промені a і b, співнапрямлені з тим самим променем c, також співнапрямлені (рис. 62, *в*).

Означення

Два промені називаються **протилежно напрямленими**, якщо один із них співнапрямлений з променем, доповняльним до іншого.

На рис. 62, *а*, *б* промені AB_1 і CD є протилежно напрямленими.

Нехай на площині задано промінь OA, причому довжина відрізка OA дорівнює a (рис. 63). Виберемо довільну точку X і побудуємо точку X' так, щоб промені XX' і OA були співнапрямленими і відрізок XX' дорівнював a. Таке перетворення точки X у точку X' є паралельним перенесенням у напрямі променя OA на відстань a.

Означення

Паралельним перенесенням фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$.

На рис. 64 фігура F' отримана з фігури F унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя OA на відстань a.

Для будь-яких двох точок A і B існує паралельне перенесення, яке переводить точку A в точку B, і тільки одне. Справді, за аксіомою відкладання відрізків на промені AB від точки A можна відкласти єдиний відрізок завдовжки AB, тобто шукане паралельне перенесення задається променем AB і довжиною відрізка AB.

Теорема (основна властивість паралельного перенесення)

Паралельне перенесення є переміщенням.

Доведення

□ Нехай унаслідок паралельного перенесення в напрямі променя OA на відстань a точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно. Розглянемо загальний випадок (рис. 65), коли відрізок XY не паралельний променю OA і не лежить на ньому (інші випадки розгляньте самостійно).

За означенням паралельного перенесення $XX' \parallel YY'$, $XX' = YY' = a$. Таким чином, чотирикутник $XX'Y'Y$, дві сторони якого паралельні й рівні, — паралелограм, звідки $XY = X'Y'$. Отже, паралельне перенесення зберігає відстань між точками, тобто є переміщенням. Теорему доведено. ■

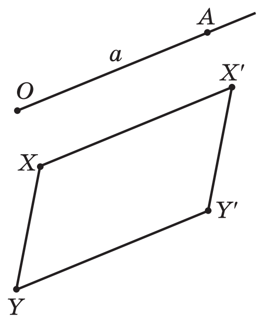


Рис. 65. До доведення основної властивості паралельного перенесення

Якщо внаслідок деякого паралельного перенесення фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має переносну симетрію. Серед фігур, які вивчаються в шкільному курсі планіметрії, таку властивість має лише пряма. Але приклади переносної симетрії можна знайти в інших науках, мистецтві й повсякденному житті. На рис. 66 подано ескіз графіка функції $y = \sin x$, яку ви будете вивчати в курсі алгебри; цей графік має переносну симетрію в напрямі осі абсцис.

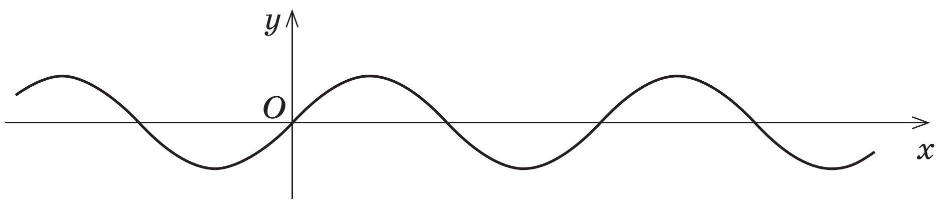


Рис. 66. Ескіз графіка функції $y = \sin x$

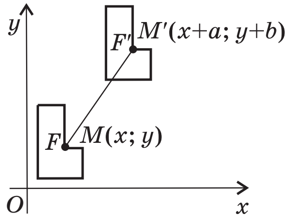


Рис. 67. Паралельне перенесення в прямокутній системі координат

У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x;\ y)$ у точку $(x';\ y')$, задається формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,$$

де a і b — деякі числа, однакові для всіх точок площини (рис. 67). Обґрунтування цього факту подано в Додатку 1.

Задача

Унаслідок паралельного перенесення точка (–2; 1) переходить у точку (3; –6). У яку точку внаслідок такого перенесення переходить початок координат?

Розв'язання

Нехай паралельне перенесення задано формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$.

Оскільки точка (–2; 1) переходить у точку (3; –6), то $3 = -2 + a$, $-6 = 1 + b$. Звідси $a = 5$, $b = -7$, тобто дане паралельне перенесення має формули $x' = x + 5$, $y' = y - 7$. Підставивши в ці формули координати початку координат $x = 0$, $y = 0$, маємо: $x' = 0 + 5 = 5$, $y' = 0 - 7 = -7$. Отже, початок координат переходить у точку (5; –7).

Відповідь: (5; –7).

11.3. *Симетрія в природі, науці й мистецтві*

У процесі вивчення многокутників ми щоразу виділяли з певного класу фігур ті, що мають елементи симетрії: серед трикутників — рівнобедрені й рівносторонні, серед паралелограмів — прямокутники, ромби й квадрати. І це не випадково, адже світ, який нас оточує, сповнений симетрії: симетричними є квіти й листя, тіла тварин і комах, сніжинки й кристали природних мінералів. Те, що створене людиною, також здебільшого симетричне — архітектурні споруди (рис. 68, 69), меблі, посуд, автомобілі тощо. Ми знаходимо симетрію в музичних і літературних творах, спортивних іграх. Німецький математик Г. Вейль (1885–1955) стверджував, що «краса нерозривно пов'язана із симетрією».

Симетрія присутня в різних розділах математики, зокрема в алгебрі. Наприклад, многочлени виду $ax^2 + bxy + ay^2$, які не змінюються

Рис. 68. Маріїнський палац у Києві

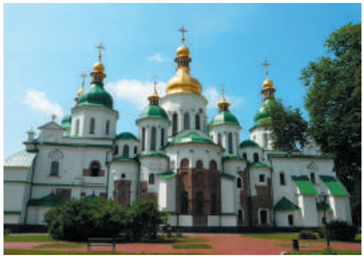


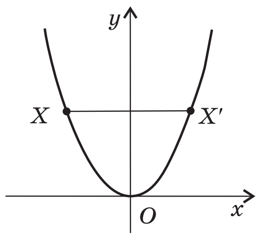
Рис. 69. Софійський собор у Києві

від перестановки змінних x і y, називають симетричними — для таких многочленів існують спеціальні способи розкладання на множники. Наочним прикладом симетрії в алгебрі є графіки елементарних функцій: так, парабола $y=x^2$ симетрична відносно осі ординат (рис. 70, *а*), а гіпербола $y=\dfrac{1}{x}$ — відносно початку координат (рис. 70, *б*).

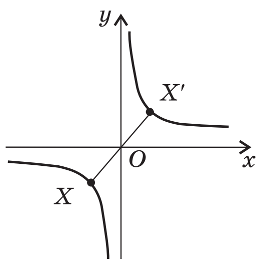
З біології відомо, що переважна більшість організмів «спроєктована» за чіткою геометричною схемою, і виділяють окремі види просторової симетрії, характерні для рослин і тварин.

З курсу хімії вам відомо, що чимало природних речовин складається з кристалів, які являють собою многогранники (з ними ви докладніше познайомитесь на уроках геометрії в старших класах). Дослідженнями встановлено, що існує 32 види симетрії кристалів.

У царині мистецтв найбільш наочно симетрія проявляється в архітектурі. За переконанням давньогрецьких архітекторів, симетрія уособлює закономірність, доцільність і гармонію. Фасади багатьох історичних і сучасних будівель мають елементи симетрії. Мотиви симетрії переважали в образотворчому мистецтві Давнього Єгипту, Греції і Риму. На особливу увагу заслуговує використання



а



б

Рис. 70. Симетрія графіків елементарних функцій симетрії в декоративно-прикладному мистецтві: структура й розміщення орнаментів на українських рушниках і вишиванках — яскраве свідчення проникнення симетрії в народну творчість (рис. 71).

Меандр

Вишиванка

Рушник

Рис. 71. Орнаменти в декоративно-прикладному мистецтві

Поетичні рими та розміри — типові прояви симетрії в літературі. З огляду на це цікаві також паліндроми («перевертні») — «симетричні» слова, фрази або вірші, що однаково читаються й зліва направо й справа наліво: «око», «зараз», «радар»; найвідоміший з українських паліндромів «І що сало? Ласощі...» придумав поет О. Ірванець. Невичерпні можливості симетрії й сьогодні приваблюють учених і митців, надихаючи їх на нові злети творчої думки.

Запитання і задачі

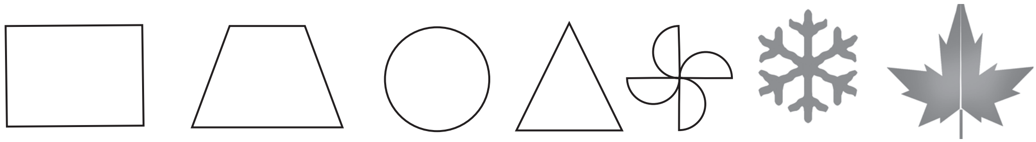
Усні вправи

352. Чи існує поворот, унаслідок якого:
а) сторона прямокутника, що не є квадратом, переходить у сусідню сторону;
б) одна діагональ прямокутника переходить в іншу;
в) один із внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший;
г) один із відповідних кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший?

353. Точка O лежить на прямій l. На який кут треба повернути пряму l навколо точки O, щоб отримати пряму, яка збігається з l?

354. Точка O не лежить на прямій l. На який кут треба повернути пряму l навколо точки O, щоб отримати пряму, паралельну l?

355. Які з фігур на рис. 72 мають симетрію обертання?



а б в г д е є

Рис. 72

356. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 73). Назвіть промінь:

а) співнапрямлений з променем AB;
б) протилежно напрямлений з променем CB;
в) співнапрямлений з променем AO;
г) протилежно напрямлений з променем OD.

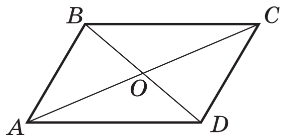


Рис. 73

357. Промені AB і CD співнапрямлені. Чи співнапрямлені промені AB і EF, якщо:

а) промені CD і EF співнапрямлені;
б) промені CD і EF протилежно напрямлені?

358. Чи існує паралельне перенесення, внаслідок якого:

а) одна сторона прямокутника переходить в іншу;
б) одна діагональ прямокутника переходить в іншу;
в) один із внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший;
г) один із відповідних кутів при паралельних прямих і січній переходить в інший?

359. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 73). Визначте образ точки A при паралельному перенесенні, внаслідок якого:

а) точка D переходить у точку C;
б) точка O переходить у точку C.

Графічні вправи

360. Накресліть відрізок AB. Позначте на прямій AB точку O, що не лежить на відрізку AB, і точку C — середину відрізка AB. Побудуйте фігуру, в яку переходить відрізок AB внаслідок повороту:

а) на $60°$ проти годинникової стрілки навколо точки O;
б) на $90°$ за годинниковою стрілкою навколо точки C.

361. Побудуйте фігуру, в яку переходить рівносторонній трикутник ABC внаслідок повороту:
а) на 60° проти годинникової стрілки навколо точки C;
б) на 180° навколо точки B.

362. Побудуйте фігуру, в яку переходить квадрат $ABCD$ внаслідок повороту:
а) на 90° за годинниковою стрілкою навколо точки D;
б) на 90° проти годинникової стрілки навколо точки перетину діагоналей.

363. На мапі України побудуйте коло, яке має центром місто Запоріжжя і проходить через місто Миколаїв. На який кут потрібно повернути відрізок «Запоріжжя — Миколаїв» навколо центра кола проти годинникової стрілки, щоб точка, що відповідає місту Миколаїв, перейшла у точку, що відповідає місту Харків?

364. Побудуйте паралелограм $ABCD$, у якому $AB = 2$ см, $BC = 4$ см. Побудуйте фігуру, в яку переходить цей паралелограм унаслідок паралельного перенесення:
а) в напрямі променя DC на 2 см;
б) в напрямі променя AD на 2 см.

365. Побудуйте фігуру, в яку переходить рівносторонній трикутник ABC внаслідок паралельного перенесення в напрямі променя CB на відстань, що дорівнює третині периметра трикутника.

Письмові вправи

Рівень А

366. Унаслідок певного повороту даний прямий кут переходить у кут, суміжний із даним. Визначте центр і кут повороту.

367. Визначте, чи мають поворотну симетрію відрізок, квадрат. У разі ствердної відповіді визначте центр і найменший кут обертання, внаслідок якого дана фігура переходить у себе.

368. Точка O лежить на прямій l. Унаслідок повороту навколо точки O ця пряма переходить у себе. Визначте кут повороту.

369. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x - 1$, $y' = y + 2$. Знайдіть координати:
а) точки, в яку переходить точка $(-3; -1)$;
б) точки, образом якої є точка $(4; -2)$.

370. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 4$, $y' = y$. Визначте напрям і відстань, якими задається це перенесення.

371. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x - 2$, $y' = y + 7$. Знайдіть координати:

а) точки, в яку переходить центр кола $(x + 1)^2 + y^2 = 9$;

б) точки, образом якої є точка перетину прямих $y = 2x$ і $x = 3$.

372. Чи існує паралельне перенесення, внаслідок якого:

а) точка (–2; 3) переходить у точку (1; –1), а точка (0; –1) — у точку (3; 3);

б) точка (1; –4) переходить у початок координат, а початок координат — у точку (–1; 4)?

373. Задайте формулами паралельне перенесення, внаслідок якого точка (8; 3) переходить у середину відрізка з кінцями (–2; 0) і (0; 16).

Рівень Б

374. Доведіть, що поворот навколо точки O на 180° є центральною симетрією відносно точки O.

375. Унаслідок повороту навколо точки O на кут α ($0° < \alpha < 180°$) точка A переходить у точку A'. Доведіть, що точки A і A' симетричні відносно прямої, що містить бісектрису кута AOA'.

376. Доведіть, що внаслідок повороту навколо центра описаного кола на кут 90° квадрат переходить у себе.

377. Кінцями діаметра кола є точки (2; 1) і (–4; 9). Складіть формули паралельного перенесення, внаслідок якого дане коло переходить у коло $(x - 3)^2 + y^2 = 25$.

378. Унаслідок паралельного перенесення точка кола $x^2 + y^2 = 36$, яка має найменшу ординату, переходить у центр цього кола. Складіть рівняння образу даного кола.

379. Вершини трикутника ABC мають координати $A(-3; -3)$, $B(-2; -1)$, $C(0; -2)$. Унаслідок паралельного перенесення точка B переходить у точку B', симетричну точці A відносно початку координат. У які точки внаслідок такого перенесення переходять вершини A і C?

Рівень В

380. Фігура F має симетрію обертання порядку n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$), якщо вона переходить у себе внаслідок повороту на кут $\frac{360^\circ}{n}$.

а) Доведіть, що рівносторонній трикутник має симетрію обертання порядку 3.

б) Визначте порядок симетрії обертання довільного паралелограма навколо точки перетину діагоналей.

381. Дано рівні відрізки AB і $A'B'$ (рис. 74). Побудуйте центр повороту, внаслідок якого один із цих відрізків переходить в інший.

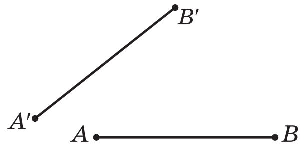


Рис. 74

382. Два гравці по черзі кладуть на круглий стіл по одній монеті у п'ятдесят копійок так, щоб вони не накладались одна на одну. Виграє той гравець, який покладе монету останнім. Як має діяти перший гравець, щоб гарантовано виграти?

383. Є дві коробки цукерок, причому кількість цукерок у коробках однакова. Кожен із двох гравців за один хід має право взяти довільну кількість цукерок, але лише з однієї коробки. Виграє той, хто візьме останню цукерку. Як має діяти другий гравець, щоб гарантовано виграти?

384. Прямі a і b перетинаються в точці O під кутом α. Доведіть, що послідовні симетрії відносно цих прямих дають поворот навколо точки O на кут 2α.

Повторення перед вивченням § 12

Теоретичний матеріал

- види переміщень;
- метод подібності.

9 клас, § 10, 11

8 клас, п. 14.2

Задачі

385. Два рівні кола мають спільну хорду AB. Доведіть, що дані кола симетричні відносно прямої AB.

386. Побудуйте трикутник за двома кутами і найбільшою висотою.

§ 12 Застосування переміщень для розв'язування задач

12.1. Розв'язування задач методом геометричних переміщень. Метод симетрії

Суть методу геометричних переміщень полягає в розгляді поряд з даними фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Залежно від того, яке переміщення застосовується, розрізняють методи симетрії, повороту, паралельного перенесення.

Метод симетрії передбачає заміну даної в умові фігури або її елементів симетричними їм відносно певної точки або прямої.

Задача

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до меншого катета, дорівнює m і утворює з більшим катетом кут 15°. Знайдіть площу трикутника.

Розв'язання

Нехай у трикутнику ABC $\angle B = 90°$, $BC < AB$, $AM = m$ — медіана (рис. 75). Побудуємо точку M_1, симетричну точці M відносно прямої AB. Тоді трикутники MAC і M_1AB рівновеликі, оскільки мають спільну висоту AB, а $M_1B = BM = MC$ за побудовою. Отже,

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{MAC} = S_{ABM} + S_{M_1AB} = S_{M_1AM}.$$

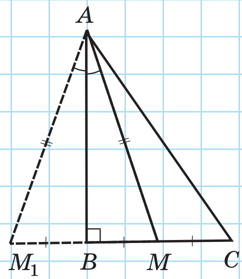


Рис. 75

За побудовою трикутник M_1AM рівнобедрений з бічною стороною m і кутом між бічними сторонами 30°.

Таким чином, $S_{M_1AM} = \frac{1}{2}m^2 \cdot \sin 30° = \frac{m^2}{4}$.

Відповідь: $\frac{m^2}{4}$.

Метод симетрії часто використовується в задачах на знаходження найменших значень певних величин.

Задача

Точка O лежить усередині гострого кута ABC. Знайдіть на сторонах кута точки X і Y такі, щоб периметр трикутника OXY був найменшим.

Розв'язання

Аналіз

Припустимо, що трикутник $OX'Y'$ шуканий (рис. 76). Вершини X' і Y', які необхідно побудувати, мають лежати на сторонах BA і BC кута ABC. Побудуємо точки O_1 і O_2, симетричні точці O відносно цих сторін. Тоді за побудовою $OX' = O_1X'$, $OY' = O_2Y'$. Знайдемо периметр шуканого трикутника:

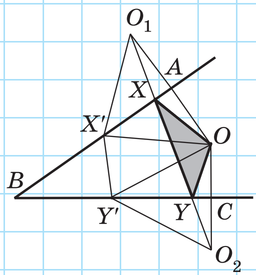


Рис. 76

$$P_{OX'Y'} = OX' + X'Y' + Y'O = O_1X' + X'Y' + Y'O_2,$$

тобто периметр дорівнює $O_1X' + X'Y' + Y'O_2$.

Ця сума буде найменшою, якщо точки O_1, X', Y' і O_2 лежатимуть на одній прямій. Отже, шукані точки X' і Y' мають лежати на прямій O_1O_2, тобто на перетині цієї прямої зі сторонами кута ABC.

Побудова

1. Побудуємо точки O_1 і O_2, симетричні точці O відносно прямих BA і BC відповідно.

2. Побудуємо пряму O_1O_2 і позначимо точки X і Y — точки перетину цієї прямої зі сторонами кута ABC.

3. Сполучимо точки X і Y з точкою O. Трикутник OXY — шуканий.

Спираючись на властивості геометричних перетворень, використаних у процесі побудови, легко довести, що побудовані точки шукані й визначаються однозначно.

12.2. *Методи повороту і паралельного перенесення*

Метод повороту доцільно використовувати в задачах, у яких задано фігури з рівними сторонами й відомими кутами — рівносторонні й прямокутні рівнобедрені трикутники, квадрати тощо. На практиці для повороту прямої a навколо точки O на даній прямій обирають дві точки і здійснюють їх поворот навколо точки O (рис. 77).

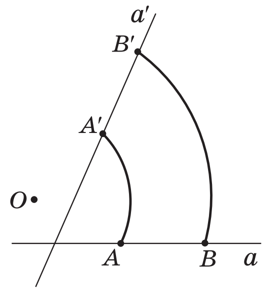


Рис. 77

Задача

Побудуйте рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

Розв’язання

Аналіз

Нехай рівносторонній трикутник ABC, вершини якого лежать на даних паралельних прямих a, b і c, побудовано (рис. 78). Розглянемо поворот прямої a навколо вершини B на 60° проти годинникової стрілки. Унаслідок такого повороту точка A переходить у точку C, а пряма a — у деяку пряму a'. Оскільки точка A лежить на прямій a, то її образ — точка C — має лежати на прямій a'. Таким чином, точка C може бути знайдена як точка перетину прямих c і a'. Аналогічно завдяки повороту прямої с навколо точки B на 60° за годинниковою стрілкою можна визначити положення точки A — образу точки C при такому повороті.

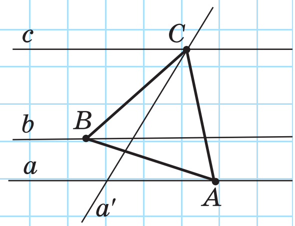


Рис. 78

Побудова

1. Позначимо на прямій b довільну точку B.

2. Виконаємо поворот прямої a навколо точки B на 60° проти годинникової стрілки. Нехай C — точка перетину прямих c і a'.

3. Виконаємо поворот прямої c навколо точки B на 60° за годинниковою стрілкою. Нехай A — точка перетину прямої a і прямої c', отриманої внаслідок цього повороту.

4. Сполучимо точки A, B і C. Трикутник ABC шуканий (це легко обґрунтувати, спираючись на властивості геометричних перетворень).

Метод паралельного перенесення особливо ефективний у випадках, коли елементи даної фігури (фігур) віддалені один від одного, внаслідок чого важко відобразити на рисунку дані умови. Зближення елементів зручно проводити шляхом паралельного перенесення.

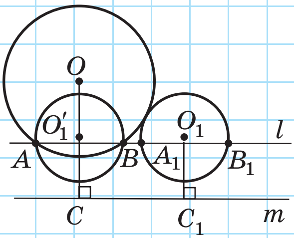


Рис. 79

Задача

Дано два кола, які мають зовнішній дотик, і пряму m. Побудуйте паралельну m пряму, на якій дані кола відтинають рівні хорди.

Розв'язання (скорочений план)

Нехай дано кола із центрами O і O_1, які дотикаються зовні, і пряму m (рис. 79). Проведемо із центрів даних кіл перпендикуляри OC і O_1C_1 на пряму m і виконаємо паралельне перенесення кола із центром O_1 в напрямі променя C_1C на відстань C_1C. Отримане коло із центром O'_1 перетинає дане коло із центром O в точках A і B. Тоді пряма l, яка проходить через ці точки, паралельна прямій m і перетинає друге дане коло в точках A_1 і B_1, причому $A_1B_1 = AB$ (доведіть це самостійно).

12.3. *Застосування геометричних перетворень*

У попередніх пунктах було розглянуто застосування різних видів переміщень, тобто перетворень, які зберігають відстані між точками. Але існують геометричні перетворення, які можуть змінювати відстані між точками. Це перетворення подібності. Розглянемо ці перетворення та їх застосування.

Перетворенням подібності (подібністю) називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого відстань між точками змінюється в тому самому відношенні k ($k > 0$).

Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F унаслідок перетворення подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = kXY$ (рис. 80).

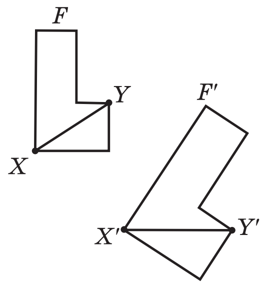


Рис. 80. Перетворення подібності переводить фігуру F у фігуру F'

Число k називають коефіцієнтом подібності. Очевидно, що якщо $k = 1$, маємо $X'Y' = XY$, тобто відстані між точками фігури зберігаються. Це означає, що переміщення є окремим випадком подібності, якщо $k = 1$.

Наочне уявлення про перетворення подібності дає зображення ділянки місцевості на плані, виконане в масштабі (рис. 81). Масштаб у цьому випадку є коефіцієнтом подібності і вказує, у скільки разів реальні відстані між об'єктами відрізняються від відстаней на плані.

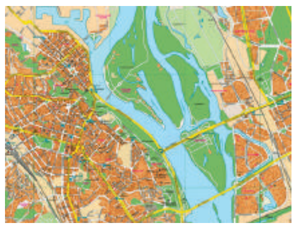


Рис. 81. План місцевості

Як і у випадку переміщення, неважко довести, що внаслідок перетворення подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їхнього взаємного розміщення зберігається. Із цього випливає, що перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

Так само, як і переміщення, перетворення подібності зберігає кути між променями. Справді, якщо внаслідок перетворення подібності кут ABC переходить у кут $A'B'C'$ (рис. 82), то $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$, $A'C' = kAC$. Отже, трикутники ABC і $A'B'C'$ подібні за трьома пропорційними сторонами, звідки $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

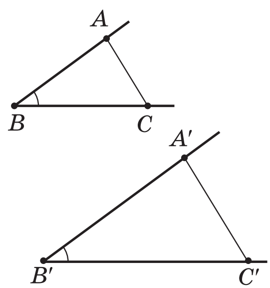


Рис. 82. Перетворення подібності зберігає кути між променями

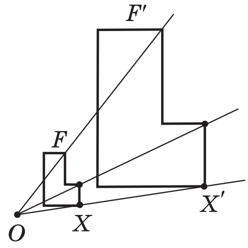


Рис. 83

Нехай на площині зафіксовано точку O, точка X — довільна точка фігури F (рис. 83). Відкладемо на промені OX відрізок OX', що дорівнює kOX (k — фіксоване додатне число). Провівши такі побудови для кожної точки фігури F, одержимо фігуру F', яка є образом фігури F, отриманим унаслідок перетворення, що називається **гомотетією**.

Число k називають **коефіцієнтом гомотетії**, а самі фігури F і F' — **гомотетичними**.

Опорна задача

Гомотетія є перетворенням подібності. Доведіть.

Розв'язання

☐ Розглянемо випадок, коли точки O, X і Y не лежать на одній прямій (інший випадок розгляньте самостійно).

Нехай унаслідок гомотетії з центром O точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно (рис. 84), тоді $OX' = k\,OX$, $OY' = k\,OY$. Отже, трикутники OXY і $OX'Y'$ подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними. Звідси випливає, що $X'Y' = kXY$, тобто гомотетія є перетворенням подібності. ■

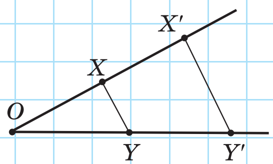


Рис. 84

Аналогічно тому, як визначаються рівні фігури за допомогою переміщень, подібні фігури можна визначити за допомогою перетворення подібності. Дві фігури будемо називати **подібними**, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Подібність довільних фігур F і F' позначається так само, як і подібність трикутників: $F \backsim F'$.

Сформулюємо декілька властивостей подібних фігур.

1) Будь-яка фігура подібна самій собі: $F \backsim F$.

2) Якщо $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$.

3) Якщо $F_1 \sim F_2$, а $F_2 \sim F_3$, то $F_1 \sim F_3$.
4) Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності: якщо $F \sim F'$ з коефіцієнтом k, то $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Спробуйте обґрунтувати їх самостійно.

Розглянемо приклад застосування перетворення подібності до розв'язування задач.

Задача

У даний трикутник *ABC* впишіть трикутник, сторони якого паралельні даним прямим *a*, *b* і *c* (рис. 85, *а*).

Розв'язання

Оберемо на стороні *AB* трикутника *ABC* довільну точку C_1 та проведемо через неї пряму, паралельну прямій *a* (рис. 85, *б*). Точку перетину цієї прямої зі стороною *AC* трикутника позначимо B_1. Проведемо через точки B_1 і C_1 прямі, паралельні прямим *b* і *c* відповідно, та позначимо точку їх перетину A_1. Розглянемо гомотетію із центром в точці *A*, яка переведе точку A_1 в точку A_2, що належить стороні *BC* трикутника *ABC*, а точки B_1 і C_1 — у точки B_2 і C_2 відповідно. Оскільки гомотетія переводить прямі у паралельні або ті самі прямі, то трикутник $A_2B_2C_2$ є шуканим (обґрунтуйте це самостійно).

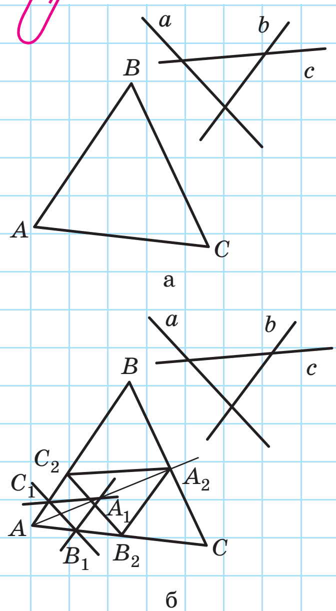


Рис. 85

12.4. Властивості відношень

Поняття рівності або подібності дозволяють установити відповідності між певними об'єктами (геометричними фігурами). Такі відповідності називають **відношеннями** (точніше, бінарними відношеннями).

Відношення зустрічаються не тільки в геометрії, але і в багатьох інших науках та повсякденному

Рефлексивність — від латинського «рефлексіо» — відображення.

житті. Наприклад, між числами можна встановити відношення «більше», «менше», «дорівнює», між іменниками української мови — «мати однакові закінчення», між людьми — «бути родичем» тощо.

Відношення, як і геометричні фігури, мають певні *властивості*. Розглянемо деякі з цих властивостей на прикладах.

1) Рефлексивність. Така властивість означає, що об'єкт перебуває в даному відношенні із самим собою: $F \sim F$, тобто будь-яка фігура подібна самій собі.

Рефлексивними також є відношення рівності геометричних фігур (будь-яка фігура дорівнює самій собі), подільності натуральних чисел (будь-яке натуральне число ділиться на себе). Не є рефлексивним відношення паралельності прямих (пряма не паралельна самій собі).

2) Симетричність. Ця властивість означає, що коли певний об'єкт перебуває в даному відношенні з другим об'єктом, то другий об'єкт перебуває в тому самому відношенні з першим: якщо $F_1 \sim F_2$, то $F_2 \sim F_1$.

Симетричними є рівність чисел (якщо $a = b$, то $b = a$) і родинні відносини між людьми (якщо А — родич В, то В — родич А). Не симетричне відношення «більше» для чисел (твердження «якщо $a > b$, то $b > a$» хибне для будь-яких a і b).

Транзитивність — від латинського «транзитус» — перехід.

3) Транзитивність. Цю властивість можна описати так: якщо в даному відношенні перебувають об'єкти 1 і 2, а також об'єкти 2 і 3, то об'єкти 1 і 3 також перебувають у цьому відношенні; наприклад, якщо $F_1 \sim F_2$, а $F_2 \sim F_3$, то $F_1 \sim F_3$.

Транзитивною є рівність фігур.

Якщо відношення є рефлексивним, симетричним та транзитивним, воно називається відношенням еквівалентності. Ось чому про рівні або подібні фігури кажуть, що вони еквівалентні.

Запитання і задачі

Усні вправи

387. За допомогою геометричних перетворень необхідно перевести один із кутів паралелограма у протилежний кут. Які перетворення можна для цього використати?

388. За допомогою геометричних перетворень необхідно отримати коло, яке дорівнює даному колу і дотикається до нього. Які перетворення можна для цього використати?

389. Чи є правильним, що:
а) будь-які дві гомотетичні фігури подібні;
б) будь-які дві подібні фігури гомотетичні?

Графічні вправи

390. Накресліть рівносторонній трикутник ABC із центром O. Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник ABC внаслідок гомотетії:
а) із центром A і коефіцієнтом 3;
б) із центром O і коефіцієнтом 2.

391. Накресліть квадрат і здійсніть його гомотетію:
а) із центром в одній із вершин і коефіцієнтом 0,5;
б) із центром у точці перетину діагоналей і коефіцієнтом 3.

Письмові вправи

Рівень А

392. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Точки M і N — середини відрізків AB і CD. За допомогою центральної симетрії доведіть, що точка O — середина відрізка MN.

393. За допомогою осьової симетрії доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

394. За допомогою паралельного перенесення доведіть, що коли одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до третьої прямої, то друга також перпендикулярна до цієї прямої.

395. За допомогою повороту доведіть, що рівні хорди кола стягують відповідно рівні дуги.

396. Чи є подібними:
а) паралелограм із кутом 40° і паралелограм із кутом 135°;
б) ромб із кутом 120° і ромб з діагоналлю, що дорівнює стороні;
в) будь-які два квадрати?

397. Діаметр Місяця приблизно дорівнює 3470 км, а відстань між поверхнями Землі та Місяця — 377 200 км. На якій відстані (у см) від спостерігача має бути розташована монета діаметром 1 см, щоб розміри монети і Місяця здавалися б цьому спостерігачу однаковими? Відповідь округліть до цілих.

398. На мапі, зробленій у масштабі 1 : 400, площа зображення земельної ділянки становить 20 см^2. Яку площу має ділянка на місцевості?

399. Під будівництво відведено ділянку площею 40 а. Знайдіть площу зображення цієї ділянки на плані, масштаб якого 1 : 1000.

Рівень Б

400. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці й кінцями на двох даних непаралельних прямих.

401. Точки A і B лежать по різні боки від прямої l. Побудуйте кут AOB так, щоб його бісектриса лежала на прямій l.

402. Точка D лежить усередині гострого кута ABC. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник DEF так, щоб вершини його гострих кутів E і F лежали на сторонах кута ABC.

403. Дано два рівні кола із центрами O і O_1, які не мають спільних точок, $OO_1 = 10$ см. Пряма l паралельна OO_1 і перетинає ці кола послідовно в точках A, B, C і D. Знайдіть довжину відрізка AC.

404. Дано точки A і B. Побудуйте центр гомотетії, внаслідок якої точка A переходить у точку B, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює 3.

405. Побудуйте центр гомотетії, внаслідок якої одна з основ трапеції переходить в іншу.

406. Доведіть, що фігура, подібна квадрату, є квадратом.

407. Унаслідок гомотетії із центром (2; –1) точка $A(8; 7)$ переходить у точку A'. Знайдіть коефіцієнт гомотетії, якщо:
а) $A'(5; 3)$; б) $A'(14; 15)$.

408. Унаслідок гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом k точка A переходить у точку A'. Знайдіть координати:
а) точки A, якщо $A'(-3; 15)$, $k = 3$;
б) точки A', якщо $A(2; 8)$, $k = 0,5$.

409. Сторона і діагональ прямокутника дорівнюють відповідно 5 см і 13 см. Знайдіть площу подібного йому прямокутника, периметр якого дорівнює 170 см.

410. Знайдіть площу ромба з периметром 20 см, якщо він подібний ромбу з діагоналями 30 см і 40 см.

Рівень В

411. Побудуйте трикутник за двома сторонами й різницею кутів, протилежних цим сторонам.

412. Дано два кола зі спільним центром. Побудуйте пряму, на якій ці кола відтинають три рівні відрізки.

413. На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Доведіть, що $AE = ED + BF$.

414. Побудуйте трапецію за діагоналями, середньою лінією і кутом при основі.

415. Доведіть, що фігура, подібна колу, є колом.

416. Дано два подібні многокутники. Доведіть, що один із них може бути перетворений в інший за допомогою гомотетії і переміщення.

417. Пряма ділить паралелограм на дві рівні частини, подібні даному паралелограму. Знайдіть відношення його сторін.

418. Установіть і доведіть ознаки подібності паралелограмів, прямокутників, ромбів, рівнобічних трапецій. Результати узагальніть у вигляді дослідження.

419. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 20 см, а бічна сторона 10 см. Знайдіть площу трапеції, яка подібна до даної і має висоту 12 см.

420. Дано коло і точку A на ньому. Точка B рухається по даному колу. Яку лінію описує під час такого руху середина відрізка AB?

421. У даний трикутник впишіть ромб так, щоб він мав із даним трикутником спільний кут.

422. Два кола мають внутрішній дотик у точці A, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яка хорда більшого кола, яка виходить із точки A, ділиться меншим колом навпіл.

Повторення перед вивченням § 13

Теоретичний матеріал

- паралельне перенесення; 9 клас, п. 11.2
- формула відстані між точками. 9 клас, п. 6.3

Задачі

423. Чи лежить точка $A(3; -5)$ на відрізку BC, якщо $B(1; -2)$, $C(5; -8)$?

424. Три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(5; 4)$. Складіть формули паралельного перенесення, яке переводить сторону BC в сторону AD, і знайдіть координати точки D.

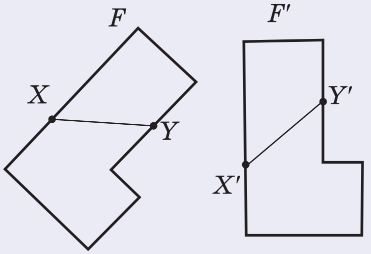
Задачі для підготовки до контрольної роботи № 3

1. Дано прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AC. Побудуйте:
   а) відрізок, симетричний катету AB відносно точки C;
   б) кут, симетричний куту ABC відносно прямої AC.
2. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-3; 1)$ відносно:
   а) початку координат; б) осі абсцис.
3. Виконайте поворот рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AC навколо вершини B на $90°$ проти годинникової стрілки. Назвіть сторони трикутника, які переходять одна в одну.
4. Складіть формули паралельного перенесення, яке переводить центр кола $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 4$ в початок координат.
5. Пряма l задана рівнянням $y = 2x + 3$. Побудуйте в прямокутній системі координат пряму l та пряму, симетричну їй відносно осі ординат. Складіть рівняння цієї прямої.
6. Пряма a перетинає дане коло із центром у точці O та є його віссю симетрії. Доведіть, що пряма a проходить через точку O.

Онлайн-тестування

Підсумки розділу III

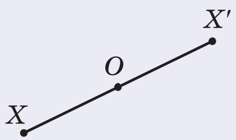
ПЕРЕМІЩЕННЯ



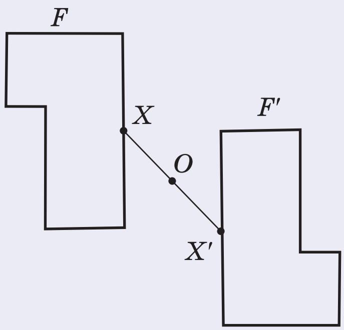
Переміщенням (або *рухом*) називається перетворення фігури, внаслідок якого зберігаються відстані між точками цієї фігури.

Дві фігури називаються *рівними*, якщо вони суміщаються переміщенням

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

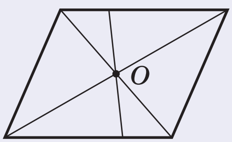


Точки X і X' називаються *симетричними відносно точки* O, якщо точка O — середина відрізка XX'



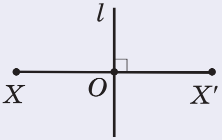
Перетворенням симетрії (*центральною симетрією*) відносно точки O називається таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну X відносно точки O.

Основна властивість симетрії відносно точки:
центральна симетрія є переміщенням

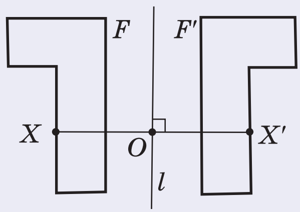


Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *центральносиметричною*, а точка O — *центром симетрії фігури* F

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

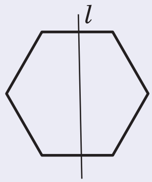


Точки X і X' називаються *симетричними відносно прямої* l, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка XX' і проходить через його середину



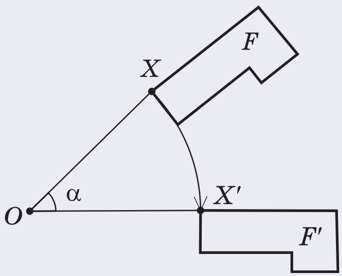
Перетворенням симетрії (*осьовою симетрією*) відносно прямої l називається таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну X відносно прямої l.

Основна властивість осьової симетрії:
осьова симетрія є переміщенням



Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то така фігура називається *симетричною відносно прямої* l, а сама пряма l — *віссю симетрії фігури* F

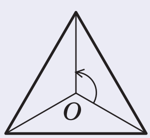
ПОВОРОТ



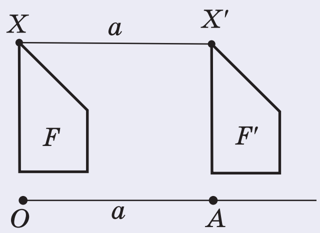
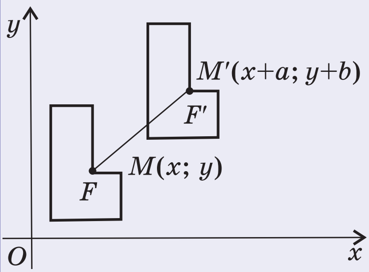
Поворотом фігури F навколо точки O на кут α називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$.

Точку O називають *центром повороту*, а кут α — *кутом повороту*.

Основна властивість повороту:
поворот є переміщенням



Якщо внаслідок повороту навколо деякої точки O фігура F переходить у себе, то кажуть, що ця фігура має *поворотну симетрію* (або *симетрію обертання*)

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ	
	*Паралельним перенесенням* фігури F у напрямі променя OA на відстань a називається перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що промені XX' і OA співнапрямлені і $XX' = a$. *Основна властивість паралельного перенесення:* паралельне перенесення є переміщенням
	У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x; y)$ у точку $(x'; y')$, задається формулами $x' = x + a,\ y' = y + b,$ де a і b — деякі числа, одакові для всіх точок площини

Контрольні запитання до розділу III

1. Дайте означення переміщення. Назвіть основні властивості переміщення. Який зв'язок переміщення має з рівністю фігур?
2. Дайте означення симетрії відносно точки. Які фігури називаються центрально-симетричними? Наведіть приклади.
3. Дайте означення симетрії відносно прямої. Що таке вісь симетрії фігури? Наведіть приклади фігур, які мають вісь симетрії.
4. Дайте означення повороту.
5. Дайте означення паралельного перенесення. Якими формулами паралельне перенесення задається в прямокутній системі координат?

Додаткові задачі до розділу III

425. Доведіть, що внаслідок переміщення медіана трикутника переходить у відповідну медіану трикутника-образу.

426. Визначте переміщення, за допомогою яких можна перевести:
а) одну з бічних сторін рівнобічної трапеції в іншу;
б) одну з протилежних сторін паралелограма в іншу.

427. Рівні кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B. Назвіть:
а) центр симетрії, яка переводить одне з даних кіл в інше;
б) вісь симетрії, яка переводить одне з даних кіл в інше;
в) центр і кут повороту, який переводить одне з даних кіл в інше;
г) промінь і відстань, що задають паралельне перенесення, яке переводить одне з даних кіл в інше.

428. Неподалік від селищ Вишневе та Яблуневе проходить залізниця (рис. 86). Станція «Садочок», сполучена із селищами прямими дорогами, розташована так, що сума відстаней від станції до селищ є найменшою з можливих. Де побудована станція? Скористайтеся методом осьової симетрії.

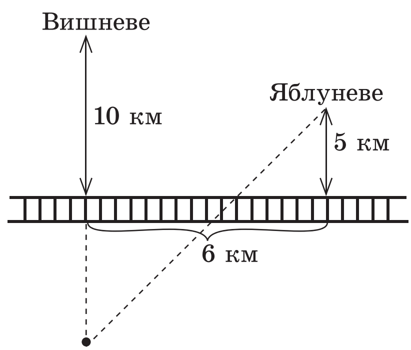


Рис. 86

429. *Дельтоїдом* називається опуклий чотирикутник, що має єдину вісь симетрії, яка містить його діагональ. Побудуйте дельтоїд і опишіть його властивості.

430. Доведіть подібність двох ромбів із відповідно пропорційними діагоналями.

431. Два кола розміщені по різні боки від прямої l. Побудуйте відрізок із кінцями на даних колах, для якого пряма l є віссю симетрії.

Задачі підвищеної складності

432. Два рівні кола мають зовнішній дотик. В одне з кіл вписано трикутник. Доведіть, що трикутник, симетричний даному відносно точки дотику, є вписаним у друге коло.

433. Кола, симетричні описаному навколо трикутника колу відносно сторін трикутника, проходять через ортоцентр цього трикутника. Доведіть.

434. Побудуйте квадрат, три вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.

435. Впишіть у даний трикутник ABC квадрат, дві вершини якого лежать на стороні AC, а дві інші — на сторонах AB і BC.

436. Побудуйте коло, яке вписане в даний кут і проходить через дану точку всередині цього кута.

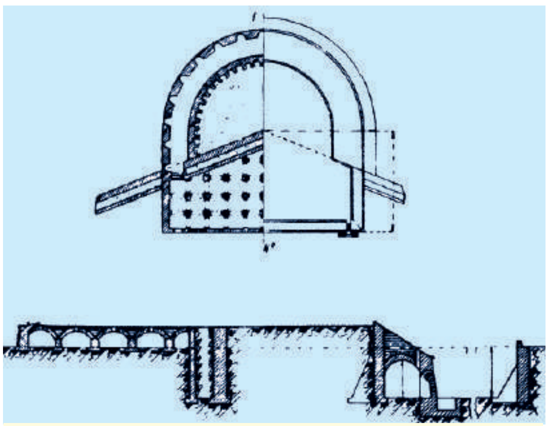
Історична довідка

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності — люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет,— так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення. Раніше за інші було встановлено й вивчено закони перспективи. Стародавні греки дотримувалися їх уже в V–IV ст. до н. е.

Зразок наскельного живопису

В епоху Відродження з'явилися перші фундаментальні дослідження з теорії перспективи, зокрема роботи видатних художників Леонардо да Вінчі (1452–1519) й Альбрехта Дюрера (1471–1528). Розробником

Нарис Леонардо да Вінчі



Бастеї Дюрера

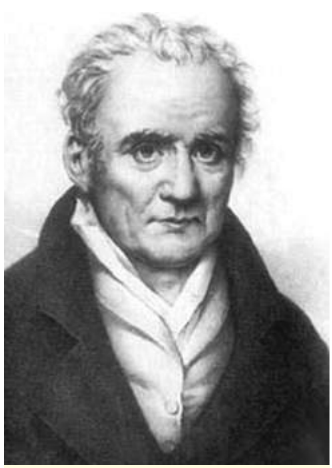
Леонардо да Вінчі

Альбрехт Дюрер

Мішель Шаль

математичних основ теорії проєктивних перетворень (теорії перспективи) став французький інженер і архітектор Жерар Дезарг (1593–1662).

Завдяки теорії перспективи вдалося досягнути достатньої наочності зображень, однак технічний прогрес вимагав точного відтворення об'єктів із дотриманням розмірів. Багато талановитих учених доклали зусиль до створення теорії взаємно однозначних відповідностей на площині й у просторі. Серед них був, зокрема, французький математик Мішель Шаль (1793–1880), який довів фундаментальну теорему про геометричні перетворення (нині відому як теорема Шаля). Підсумував наукові пошуки в галузі геометричних перетворень французький геометр Гаспар Монж (1746–1818), створивши новий розділ геометрії — нарисну геометрію.



Гаспар Монж

Пізніше на основі розподілу геометричних перетворень на групи було виділено ще декілька розділів геометрії — афінна, проєктивна та інші. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки.

Математичні олімпіади

Валентин Миколайович Лейфура (1947–2011)

В. М. Лейфура народився в 1947 році у селищі міського типу Березанці Миколаївської області. Його неабияку схильність до точних наук помітили ще в шкільні роки, і подальше навчання в Республіканській фізико-математичній школі-інтернаті при Київському державному університеті імені Т. Г. Шевченка остаточно визначило долю талановитого юнака. Блискавично промайнули роки навчання на фізико-математичному факультеті Миколаївського педагогічного інституту, відбулося становлення науковця в аспірантурі на кафедрі вищої математики Київського педагогічного інституту. Молодого кандидата фізико-математичних наук запрошують до рідного Прибужжя — працювати в Миколаївському педагогічному інституті. Тут В. М. Лейфура згодом очолив кафедру математичного аналізу, вів плідну наукову та педагогічну діяльність.

Незабутні юнацькі роки, спогади про вибір майбутньої професії надихнули Валентина Миколайовича на роботу з математично обдарованими дітьми, яка стала для нього дуже важливою частиною життєвого шляху. Тридцять років роботи у складі журі Всеукраїнської математичної олімпіади, до якого його запросив видатний математик і педагог Михайло Йосипович Ядренко, виявилися для професора Лейфури знаковими. В. М. Лейфура також активно працював у складі журі Всеукраїнських турнірів юних математиків, які проводяться з 1998 року. Він створив чимало чудових оригінальних задач для учнівських математичних змагань.

Ось одна з них — на застосування знань з теми «Осьова симетрія». *Точка M є серединою гіпотенузи AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC, а точка K — така точка катета BC, що* $BK = 2KC$*. Точку N обрано на катеті AC так, що для точки L перетину відрізків AK і MN промінь LC є бісектрисою кута KLN. Доведіть, що* $KN \parallel AB$.

Доведення

На промені AC виберемо таку точку F, що $AC = CF$. Тоді точка K є точкою перетину медіан трикутника ABF (рис. 87). Зазначимо, що точка C рівновіддалена від прямих AK і MN, оскільки лежить на бісектрисі LC кута KLN. До того ж точка C рівновіддалена від прямих AK і MK. Дійсно, KC — висота та медіана трикутника AKF. Тому цей трикутник є рівнобедреним, а KC — його бісектриса. Таким чином, точка C рівновіддалена від прямих MK і MN, а тому промінь MC є бісектрисою кута KMN.

Розглянемо симетрію відносно прямої MC. Промені CA і CB перейдуть один в інший так само, як і промені MK і MN. Тому точки перетину вказаних променів N і K перейдуть одна в іншу. Отже, точки K і N симетричні відносно прямої CM, а тому $CK = CN$. Звідси вочевидь випливає, що $KN \parallel AB$. Спробуйте самостійно розв'язати цю задачу в інший спосіб.

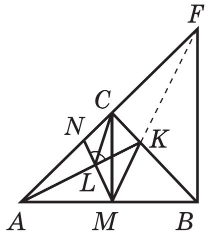


Рис. 87

Під час напруженої праці на олімпіадах Валентин Миколайович завжди був справжнім взірцем виваженості, доброзичливості, але разом з тим — принциповості та вимогливості. Завдяки спілкуванню з ним математично обдаровані діти набували незабутнього досвіду, а тому на олімпіадах і турнірах до Валентина Миколайовича дуже часто звертались із запитаннями, чекали від нього порад.

Протягом багатьох років В. М. Лейфура керував створеним ним у Миколаєві семінаром для юних математичних обдарувань, що не мав аналогів в Україні. Цей семінар дав поштовх для розвитку багатьом талановитим дітям. Так, учень В. М. Лейфури двічі виборював срібні медалі на Міжнародних математичних олімпіадах. Значну увагу Валентин Миколайович завжди приділяв не тільки «математичному спорту», але й залученню юнацтва до основ суто наукової роботи в Малій академії наук. Багато років В. М. Лейфура був членом редакційної ради журналу «У світі математики», заснованого М. Й. Ядренком, підготував багато статей та посібників для юних математичних талантів.

Вагомий внесок Валентина Миколайовича Лейфури в розвиток національної освіти був відзначений почесним званням «Заслужений вчитель України» у 2002 році. Також у 2002 році мешканці міста Миколаєва визнали професора державного університету ім. Петра Могили В. М. Лейфуру «Городянином року» у номінації «Середня школа».

Валентин Миколайович Лейфура був людиною щедрої душі, на його мудрість, життєвий досвід, допомогу в складних ситуаціях завжди могли розраховувати друзі та колеги.

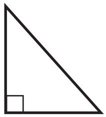
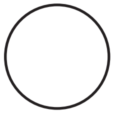
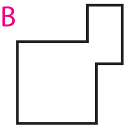
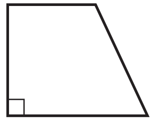
Професор Лейфура є взірцем справжньої Людини, яка дуже любила життя і цінувала в ньому все — і українські народні пісні, і математичні олімпіади, і високу науку.

Готуємось до ДПА

Тест 3

Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

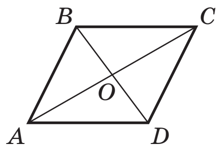
1. Серед наведених фігур виберіть ту, яка має вісь симетрії.

А  Б  В  Г 

2. Укажіть геометричну фігуру, в яку переходить гострий кут унаслідок переміщення.

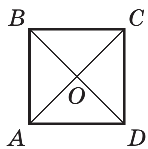
А Тупий кут В Розгорнутий кут
Б Промінь Г Кут, що дорівнює даному

3. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Укажіть відрізок, у який переходить відрізок BO внаслідок симетрії відносно точки O.



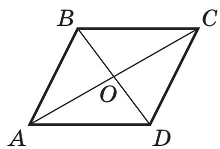
А BD Б DO В AD Г BC

4. На рисунку зображено квадрат $ABCD$. Укажіть відрізок, у який переходить відрізок AO внаслідок повороту навколо точки O на 90° проти годинникової стрілки.



А BO Б CO В DO Г AB

5. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Унаслідок паралельного перенесення точка B переходить у точку O. Укажіть точку, в яку внаслідок такого перенесення переходить точка O.

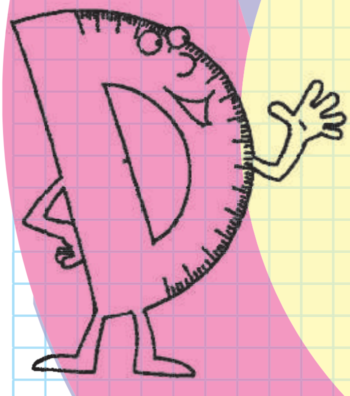


А A Б B В C Г D

6. Серед наведених перетворень укажіть те, за допомогою якого неможливо перевести одну з двох протилежних сторін паралелограма з кутом 30° в іншу.

А Центральна симетрія В Паралельне перенесення
Б Осьова симетрія Г Поворот

Розділ IV
Вектори на площині



Доступ до глибших принципових проблем у фізиці вимагає найвитонченіших математичних методів.

Альберт Ейнштейн, засновник сучасної фізики

Як відомо з курсу фізики, деякі величини, наприклад сила, швидкість, прискорення тощо, характеризуються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Необхідність математичного моделювання таких величин зумовила створення теорії векторів.

У сучасній математиці один із розділів, у якому вивчають дії з векторами, не випадково називають векторною алгеброю, адже операції над векторами мають багато спільного з алгебраїчними діями. Вектори, як і координати, значно розширюють арсенал способів геометричних доведень та обчислень і спрощують деякі з них.

Векторні співвідношення широко застосовуються в природничих науках і багатьох галузях техніки. Завдяки вивченню векторів ви зможете краще опанувати методи розв'язування не лише геометричних, але й фізичних задач.

§ 13 Початкові відомості про вектори

13.1. Означення вектора. Модуль і напрям вектора

У природничих науках зустрічаються величини, які повністю характеризуються числовим значенням, — довжина, площа, температура, маса тощо (такі величини називають скалярними). Але чимало величин задаються не тільки числовим значенням, але й напрямом. Так, для розв'язування задачі про рух автомобіля недостатньо знати його швидкість — треба уточнити, в якому напрямі він рухається. У такому випадку швидкість автомобіля розглядається як векторна величина. Отже, векторна величина характеризується числовим значенням і напрямом. У геометрії векторні величини зображають за допомогою напрямлених відрізків.

Вектор — від латинського «вектор» — той, що несе.

Означення

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, яка точка є його початком, а яка — кінцем.

Зазвичай вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує напрям вектора. Для позначення векторів використовують малі латинські літери (a, b, c...) або дві великі латинські літери, перша з яких позначає початок вектора, а друга — кінець вектора. Замість слова «вектор» над позначенням вектора ставлять стрілку. Так, вектор з початком A і кінцем B (рис. 88) позначають $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$.

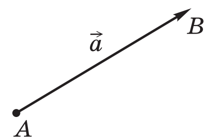


Рис. 88. Вектор

Означення

Модулем (або довжиною) вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB, що зображує вектор.

Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Означення

Нульовим вектором називається вектор, початок і кінець якого збігаються.

Таким чином, будь-яку точку A площини можна вважати нульовим вектором $\overrightarrow{AA}$. Нульовий вектор позначають так: $\vec{0}$. Напряму він не має, а його довжина дорівнює нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Колінеарний — від латинського «ко-» — з, разом і «лінеаріс» — лінійний.

Означення

Ненульові вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

На рис. 89 вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{EF}$ колінеарні. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Означення

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **співнапрямленими** (або **однаково напрямленими**), якщо промені AB і CD співнапрямлені.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються **протилежно напрямленими**, якщо промені AB і CD протилежно напрямлені.

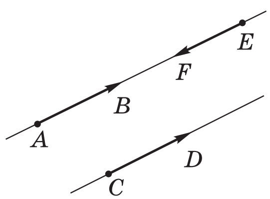


Рис. 89. Колінеарні вектори

На рис. 89 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ співнапрямлені (коротко це позначають так: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), а вектори $\overrightarrow{EF}$ і $\overrightarrow{CD}$ протилежно напрямлені (коротко це позначають так: $\overrightarrow{EF} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Зазначимо, що завдяки щойно введеним поняттям можна спростити означення паралельного перенесення. Тепер замість паралельного перенесення в напрямі променя AB на відстань AB можна розглядати **паралельне перенесення на вектор** $\overrightarrow{AB}$.

13.2. *Рівні вектори*

Означення

Два вектори називаються рівними, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

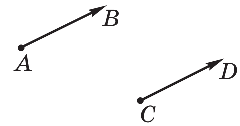


Рис. 90. Рівні вектори

Це означає, що існує паралельне перенесення, внаслідок якого початок і кінець одного вектора переходять відповідно в початок і кінець іншого. На рис. 90 зображено рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Їх рівність позначають так: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Обґрунтуємо основні властивості й ознаки рівних векторів.

1) Рівні вектори співнапрямлені та мають рівні довжини.

Ця властивість випливає безпосередньо з означення рівних векторів і властивостей паралельного перенесення.

2) Якщо вектори співнапрямлені і мають рівні довжини, то вони рівні.

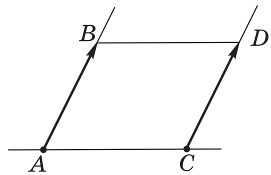


Рис. 91. До обґрунтування ознаки рівних векторів

Справді, нехай вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ співнапрямлені та мають рівні довжини (рис. 91). Паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AC}$ переводить промінь AB у співнапрямлений промінь CD. Оскільки відрізки AB і CD рівні, то внаслідок такого паралельного перенесення точка A переходить у точку C, а точка B — у точку D. Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ суміщаються паралельним перенесенням, тобто рівні за означенням.

3) Від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один.

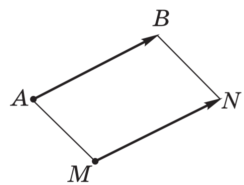


Рис. 92. Відкладання вектора, що дорівнює даному

Справді, нехай дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку M (рис. 92). Існує єдине паралельне перенесення, внаслідок якого точка A переходить у точку M — паралельне перенесення на вектор $\overrightarrow{AM}$. Під час такого перенесення вектор $\overrightarrow{AB}$ переходить у вектор $\overrightarrow{MN}$, який за означенням дорівнює $\overrightarrow{AB}$.

Для практичного відкладання від заданої точки вектора, що дорівнює даному, варто зазначити, що у випадку, коли точка M не лежить на прямій AB, чотирикутник $ABNM$ — паралелограм.

Зауважимо також, що рівні вектори, відкладені від різних точок, часто позначають тією самою літерою. Про такі вектори кажуть, що це той самий вектор, відкладений від різних точок. Такий підхід є цілком природним: справді, розглядаючи декілька зображень Вінні-Пуха, ми кажемо: «Це — Вінні-Пух», а не «Це — різні зображення Вінні-Пуха».

13.3. *Координати вектора*

Досі, кажучи про координати, ми мали на увазі координати точки, які однозначно задають її розміщення в системі координат. Виявляється, за допомогою координат можна описувати і вектори.

Означення

Координатами вектора з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$.

Інакше кажучи, кожна координата вектора дорівнює різниці відповідних координат його кінця і початку.

Координати вектора записують у дужках поряд із його буквеним позначенням: $\overrightarrow{AB}(a_1;\ a_2)$. Іноді для позначення вектора з координатами a_1 і a_2 використовують запис $\overrightarrow{(a_1;\ a_2)}$. Очевидно, що нульовий вектор має нульові координати: $\vec{0}(0;\ 0)$.

Із формули відстані між точками маємо:

довжина вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ обчислюється за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Теорема
(властивість і ознака координат рівних векторів)

Рівні вектори мають рівні відповідні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні.

Доведення

□ 1) *Властивість.*

Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — початок і кінець даного вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{a'}$, що дорівнює $\vec{a}$, можна отримати з вектора $\vec{a}$ паралельним перенесенням. Нехай це перенесення задається формулами $x' = x + c$, $y' = y + d$. Тоді $\vec{a'} = \overrightarrow{A'B'}$, де $A'(x_1 + c;\ y_1 + d)$, $B'(x_2 + c;\ y_2 + d)$. Очевидно, що обидва вектори $\vec{a}$ і $\vec{a'}$ мають координати $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$, що й треба було довести.

2) *Ознака.*

Нехай тепер вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A'B'}$ мають рівні координати. Якщо початком і кінцем другого вектора є точки $A'(x'_1; y'_1)$ і $B'(x'_2; y'_2)$, то за умовою $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$. Звідси $x'_2 = x_2 - x_1 + x'_1$, $y'_2 = y_2 - y_1 + y'_1$. Паралельне перенесення, задане формулами $x' = x - x_1 + x'_1$, $y' = y - y_1 + y'_1$, переводить точку A в точку A', а точку B — у точку B', тобто суміщає вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{A'B'}$. Отже, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, що й треба було довести.

Теорему доведено повністю. ■

Зазначимо, що координати вектора не фіксують напрямлений відрізок, а лише задають його довжину і напрям.

Як приклад застосування рівності координат векторів наведемо ще один спосіб розв'язування відомої задачі про пошук четвертої вершини паралелограма.

Задача

Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$.

Розв'язання

Якщо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (рис. 93), то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Нехай шукана вершина — $D(x; y)$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(0-(-2);\ 4-1)} = \overrightarrow{(2; 3)},\quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(4-x;\ 1-y)}.$$

Отже, $4 - x = 2$, $1 - y = 3$, звідки $x = 2$, $y = -2$.

Відповідь: $(2; -2)$.

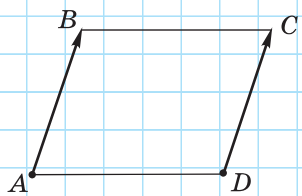


Рис. 93

Запитання і задачі

Усні вправи

437. На площині позначено точки A і B. Чи є правильним, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$:
а) мають однакові довжини; б) співнапрямлені; в) рівні?

438. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ колінеарні. Чи лежить точка B на прямій AC; на відрізку AC?

439. Точка C — середина відрізка AB. Чи є рівними вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$? Чи є рівними вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$?

440. Дано паралелограм $ABCD$ (рис. 94). Назвіть вектори:
а) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{DC}$;
б) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{AO}$;
в) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{AD}$;
г) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{BD}$;
д) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{AB}$;
е) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{OC}$;
є) що дорівнюють вектору $\overrightarrow{BB}$.

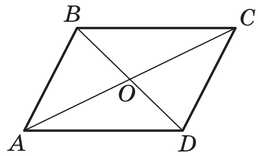


Рис. 94

441. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

442. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Чи є правильним, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$? Чи є правильним, що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$?

443. Відомо, що $\vec{a} = \vec{b}$. Чи правильно, що:
а) дані вектори мають відповідно рівні координати;
б) відрізки, що зображають дані вектори, обов'язково збігаються;
в) у разі відкладання від однієї точки відрізки, що зображають відкладені вектори, обов'язково збігаються?

Графічні вправи

444. Накресліть паралельні прямі a і b. Позначте на прямій a точки A і B, а на прямій b — точку C.
а) Відкладіть від точки C вектор $\overrightarrow{CD}$, співнапрямлений з $\overrightarrow{AB}$.
б) Відкладіть від точки C вектор $\overrightarrow{CE}$, протилежно напрямлений з $\overrightarrow{AB}$.
в) Відкладіть від точки B вектор $\overrightarrow{BF}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$. Чи є співнапрямленими вектори $\overrightarrow{BF}$ і $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BF}$ і $\overrightarrow{ED}$?

445. Накресліть ромб $ABCD$.

а) Відкладіть від точки B вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$.

б) Відкладіть від точки B вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.

в) Виконайте паралельне перенесення даного ромба на вектор $\overrightarrow{BD}$.

Письмові вправи

Рівень А

446. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 5$, $BC = 12$, точка E — середина сторони BC. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$.

447. У ромбі $ABCD$ $AC = 8$, $BD = 6$, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{AB}$.

448. Доведіть, що в паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

449. Точка O — середина відрізка AB. Назвіть пари рівних векторів із кінцями в даних точках і доведіть їх рівність.

450. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(-1; 4)$, $B(3; 9)$;

б) $A(2; -5)$, $B(-1; -1)$;

в) $A(3; 2)$, $B(3; -2)$.

451. Відомо, що $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\vec{a}\,(2; -1)$, O — початок координат. Знайдіть координати точки A.

452. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $\overrightarrow{AB}\,(7; 24)$;

б) $A(0; -1)$, $B(3; -5)$;

в) $A(2; -4)$, $B(2; -1)$.

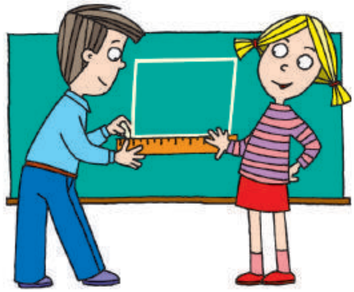
453. Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(-3; 1)$, $B(5; -5)$;

б) $A(12; 0)$, $B(0; -5)$.

454. Відкладіть від точки $D(1; 3)$ вектори $\vec{a}\,(2; -1)$ і $\vec{b}\,(-3; 4)$. Знайдіть координати кінців цих векторів.

455. Кінцем вектора $\vec{a}\,(-3; 7)$ є точка $(0; -2)$. Знайдіть координати початку вектора і відкладіть його в прямокутній системі координат.



456. За допомогою векторів доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-2;\ -1)$, $B(1;\ 2)$, $C(2;\ 2)$, $D(-1;\ -1)$.

457. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма $ABCD$, якщо $B(3;\ 1)$, $C(5;\ 0)$, $D(2;\ -3)$.

Рівень Б

458. У прямокутній трапеції $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB = 4$, $AD = 7$, $\angle D = 45°$. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{BD}$.

459. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 7$, діагональ AC більша за діагональ BD на 2. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$.

460. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$;

б) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ і $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$;

в) $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$, а вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не колінеарні.

461. Якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть.

462. Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до твердження попередньої задачі.

463. Довжина вектора $\vec{a}(m-3;\ m-1)$ дорівнює 10. Знайдіть m.

464. Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює 5. Знайдіть координати точки B, якщо $A(4;\ -2)$, а точка B лежить на прямій $y = 2x$.

465. Довжина вектора $\vec{a}\,(m;\ 15)$ дорівнює 17. Знайдіть m.

466. Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}\,(-2;\ 1)$ і $\vec{b}\,(1;\ 2)$. Знайдіть координати і довжину вектора, початком якого є кінець вектора $\vec{a}$, а кінцем — кінець вектора $\vec{b}$.

467. Відкладіть від точки $(1;\ 3)$ вектори $\vec{a}\,(2;\ -1)$ і $\vec{b}\,(-4;\ 2)$. Чи колінеарні ці вектори?

Рівень В

468. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні. Чи означає це, що $ABCD$ — трапеція? Відповідь обґрунтуйте.

469. Дано паралелограми $ABCD$ і A_1BC_1D. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{C_1C}$.

470. Від точки M, яка лежить поза рівностороннім трикутником ABC, відкладено вектори $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{ME}$ і $\overrightarrow{MD}$, що дорівнюють відповідно векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$. Доведіть, що $MFED$ — ромб.

471. У колі проведено діаметр AC і хорду AB. Від точки M, що лежить усередині кола, відкладено вектори $\overrightarrow{MD}$ і $\overrightarrow{ME}$, які дорівнюють відповідно векторам $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Знайдіть кут MDE.

Повторення перед вивченням § 14

Теоретичний матеріал

- нерівність трикутника; 7 клас, п. 18.2
- найпростіші задачі в координатах. 9 клас, § 6

Задачі

472. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій, якщо $AB = 8{,}3$ см, $BC = 10{,}1$ см, $AC = 1{,}8$ см. Яка з цих точок лежить між двома іншими?

473. Чи лежать на одній прямій точки $A(-2;\ -2)$, $B(-3;\ -4)$, $C(0;\ 2)$? Розв’яжіть задачу двома способами.

§ 14 Додавання і віднімання векторів

14.1. Додавання векторів

Для векторів, як і для чисел, визначають операції додавання і віднімання, причому результатами цих дій також є вектори.

Означення

Сумою векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$.

Таким чином,

$$\overrightarrow{(a_1;\ a_2)} + \overrightarrow{(b_1;\ b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}.$$

Сформулюємо властивості додавання векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$, $\vec{b}\ (b_1;\ b_2)$, $\vec{c}\ (c_1;\ c_2)$:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти координати векторів у правій і лівій частинах кожної рівності. Очевидно, що ці координати рівні, отже, рівні й самі вектори.

У який спосіб можна побудувати зображення вектора-суми за зображеннями векторів-доданків? Для відповіді на це запитання доведемо таку теорему.

Теорема (про додавання векторів)

Для будь-яких точок A, B і C справджується векторна рівність

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

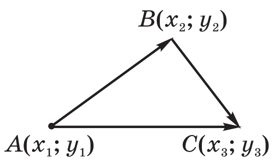


Рис. 95. До доведення теореми про додавання векторів

Доведення

☐ Нехай дано точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$ (рис. 95). Виразивши координати векторів-доданків, маємо: $\overrightarrow{AB}\left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2\right)$.

За означенням суми векторів для визначення координат вектора-суми додамо відповідні координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1,\quad y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Отже, координати вектора-суми збігаються з координатами вектора $\overrightarrow{AC}$, тобто вектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ рівні. Теорему доведено. ■

Наслідками із цієї теореми є такі способи побудови суми векторів.

1) *Правило трикутника.* Нехай дано ненульові неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 96, *а*). Відкладемо від кінця вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вектор $\overrightarrow{BC}$, що дорівнює вектору $\vec{b}$. Тоді за доведеною теоремою вектор $\overrightarrow{AC}$, початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{AB}$, а кінець — з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$, є вектором-сумою $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Побудову вектора $\vec{a} + \vec{b}$ у випадку, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, показано на рис. 96, *б*, *в*.

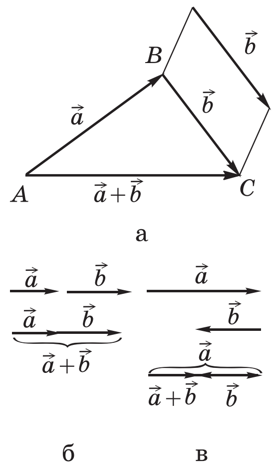


Рис. 96. Побудова суми векторів за правилом трикутника

2) *Правило паралелограма.* Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зі спільним початком вектор-сума $\vec{a} + \vec{b}$ зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах, причому початок вектора $\vec{a} + \vec{b}$ збігається зі спільним початком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 97). Справді, якщо відкласти від кінця вектора $\vec{a}$ вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$, ця побудова зводиться до попередньої.

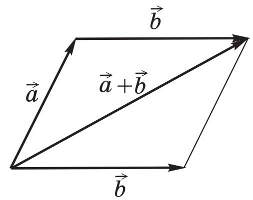


Рис. 97. Побудова суми векторів за правилом паралелограма

3) *Правило многокутника.* Якщо декілька векторів-доданків відкладено так, що початок другого вектора збігається з кінцем першого, початок третього — з кінцем другого і т. д., то початок вектора-суми є початком першого вектора, а кінець — кінцем останнього:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

На рис. 98 показано застосування правила многокутника для додавання векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

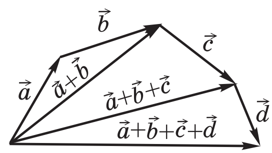


Рис. 98. Побудова суми векторів за правилом многокутника

Задача

Дано вектори $\vec{a}(2; 3)$ і $\vec{b}(-4; 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$ такого, що $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Розв'язання

Якщо $\vec{c}(c_1; c_2)$ — шуканий вектор, то $-4+c_1=2$; $5+c_2=3$. Отже, $c_1=6$, $c_2=-2$.

Відповідь: $\vec{c}(6; -2)$.

14.2. Віднімання векторів

Вектор $\vec{c}$, знайдений у попередній задачі, можна визначити як різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Означення

Різницею векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$:

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}.$$

Із цього означення знаходимо координати вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$:

$$c_1=a_1-b_1,\ c_2=a_2-b_2.$$

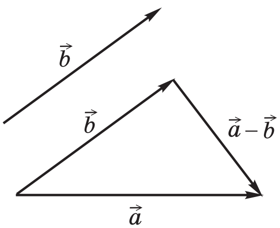


Рис. 99. Побудова різниці векторів

Для побудови вектора-різниці скористаємося правилом трикутника і рівністю $\vec{b}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}$. Відкладемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї точки (рис. 99). Тоді початок вектора-різниці є кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — кінцем вектора $\vec{a}$, тобто вектор-різниця сполучає кінці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та напрямлений у бік зменшуваного.

Означення

Протилежними векторами називаються два протилежно напрямлені вектори однакової довжини.

На рис. 100 вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$, а також вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ протилежні. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають $-\vec{a}$. Очевидно, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

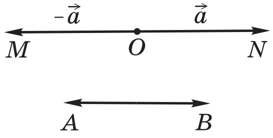


Рис. 100. Протилежні вектори

Покажемо, що $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Справді, за означенням різниці векторів $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$. Додавши до обох частин цієї рівності вектор $-\vec{b}$, маємо: $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$, $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=\vec{a}+(-\vec{b})$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

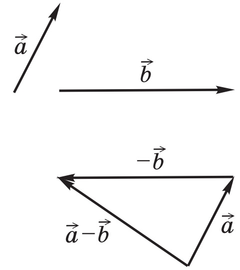


Рис. 101

Щойно обґрунтована формула вказує, що для отримання різниці $\vec{a}-\vec{b}$ можна додати до вектора $\vec{a}$ вектор, протилежний вектору $\vec{b}$ (рис. 101).

Операції додавання й віднімання векторів широко застосовують у фізиці для додавання сил. На рис. 102 проілюстровано фізичний зміст відомої байки Л. Глібова «Лебідь, Щука і Рак»: для визначення напрямку руху хури необхідно знайти рівнодійну сил Лебедя, Щуки й Рака, тобто суму векторів $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Як відомо з байки, «хура й досі там», тобто $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

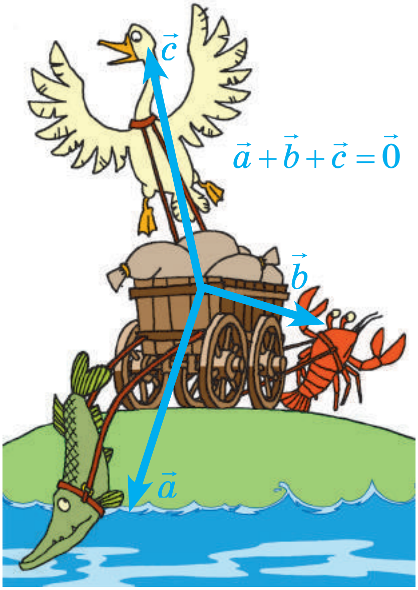


Рис. 102

Запитання і задачі

Усні вправи

474. Чи може сума двох векторів дорівнювати:

а) нулю;

б) нульовому вектору;

в) одному з векторів-доданків?

475. Чи може довжина вектора-суми дорівнювати сумі довжин векторів-доданків? Якщо так, то в якому випадку?

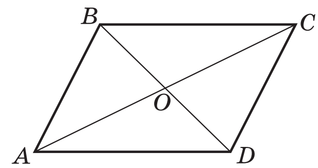


Рис. 103

476. Дано паралелограм $ABCD$ (рис. 103). Назвіть вектор-суму:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$;   в) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$;

б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$;   г) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}$.

477. Чи може різниця двох векторів дорівнювати їх сумі? Якщо так, то в якому випадку?

478. Дано паралелограм $ABCD$ (рис. 103). Назвіть вектор, протилежний:

а) вектору $\overrightarrow{BC}$;   б) вектору $\overrightarrow{OA}$.

479. У паралелограмі $ABCD$ (рис. 103) назвіть вектор-різницю:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;   б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}$;   в) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$.

Графічні вправи

480. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 104). Побудуйте вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{d}$, $\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{d}-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$, $\vec{b}-\vec{d}$. Чи є серед них протилежні?

481. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 105). Побудуйте вектори:

а) $\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{d}$ за правилами трикутника й паралелограма та за допомогою координат;

б) $\vec{b}-\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ трьома способами.

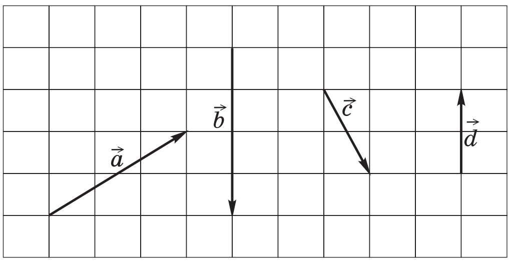


Рис. 104

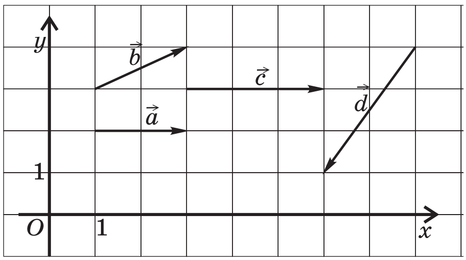


Рис. 105

482. Накресліть довільний трикутник ABC.

а) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AD}$, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

б) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AE}$, що дорівнює різниці $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AE}$ і $\overrightarrow{BC}$?

Письмові вправи

Рівень А

483. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a}+\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}\,(2;\ -9)$, $\vec{b}\,(6;\ 3)$;

б) $\vec{a}\,(0;\ 4)$, $\vec{b}\,(-3;\ 0)$;

в) $\vec{a}\,(-1;\ 5)$, $\vec{b}\,(1;\ -5)$.

484. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}\,(-4;\ 7)$, $\vec{b}\,(8;\ 2)$;

б) $\vec{a}\,(2;\ -2)$, $\vec{b}\,(-3;\ 3)$;

в) $\vec{a}\,(0;\ 1)$, $\vec{b}\,(0;\ -2)$.

485. Знайдіть вектор-суму $\vec{a}+\vec{b}$ і вектор-різницю $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}\,(-3;\ -1)$, $\vec{b}\,(-1;\ 2)$;

б) $\vec{a}\,(2;\ -7)$, $\vec{b}\,(2;\ 3)$.

486. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть:

а) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$;

б) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$;

в) $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|$;

г) $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right|$.

487. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $AC = a$. Знайдіть:

а) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right|$;

б) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$;

в) $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right|$;

г) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right|$.

488. Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

489. Доведіть, що в трикутнику ABC $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

490. Точки M і N — середини сторін AB і AC трикутника ABC. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AM}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AN}$ вектори:

а) $\overrightarrow{MB}$;

б) $\overrightarrow{CN}$;

в) $\overrightarrow{MN}$.

491. Дано трикутник ABC. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ вектори:

а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CB}$.

Рівень Б

492. Дано точки $A(-1;\ 4)$, $B(0;\ -2)$, $C(3;\ 5)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\overrightarrow{AB}+\vec{a}$, де $\vec{a}\,(0;\ -2)$;

б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$;

в) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$.

493. Дано точки $A(0;\ -1)$ і $C(3;\ 5)$ та вектор $\overrightarrow{AB}\ (1;\ 2)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

494. Дано точки $O(0;\ 0)$, $A(1;\ -4)$, $B(8;\ 3)$. Знайдіть координати вектора:

а) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}$.

495. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 4$, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть:

а) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$; б) $\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\right|$; в) $\left|\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BC}\right|$.

496. У ромбі $ABCD$ $AC = 10$, $BD = 24$, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть:

а) $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right|$; б) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right|$; в) $\left|\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BA}\right|$.

497. Точка O — центр рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

498. Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$.

499. Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$;

б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$;

в) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DA}$.

500. Відрізок BD — медіана трикутника ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$; б) $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Рівень В

501 (опорна). Доведіть нерівність трикутника для векторів: *для будь-яких векторів* $\vec{x}$ *і* $\vec{y}$ *справджується нерівність* $|\vec{x}+\vec{y}| \leqslant |\vec{x}|+|\vec{y}|$.

502. Чи може дорівнювати нульовому вектору сума трьох векторів, довжини яких становлять:
а) 1, 2 і 9; б) 3, 5 і 8; в) 3, 4 і 5?

503. Доведіть, що для будь-яких неколінеарних векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ справджується нерівність $|\vec{x}-\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$. У якому випадку $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|+|\vec{y}|$? У якому випадку $|\vec{x}-\vec{y}|=|\vec{x}|-|\vec{y}|$?

504. Якщо точка O — точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Доведіть.

505. Дано паралелограм $ABCD$ і довільну точку M. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Повторення перед вивченням § 15

Теоретичний матеріал

- теорема косинусів; 9 клас, § 2
- рівняння прямої. 9 клас, § 7

Задачі

506. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $A(-4; 2)$.

507. Дано точки $A(1; 5)$, $B(3; 1)$, $C(5; 2)$. Знайдіть кут ABC.

§ 15 Множення вектора на число. Скалярний добуток векторів

15.1. Множення вектора на число

Як відомо з курсу алгебри, суму n доданків, кожний із яких дорівнює a, можна подати у вигляді добутку na. Аналогічне подання для векторів можливе завдяки операції множення вектора на число.

Означення

Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ на число k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) називається вектор $k\vec{a} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Це означає, що $k\overrightarrow{(a_1; a_2)} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Сформулюємо властивості множення вектора на число.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та чисел k, m:

1) $k\vec{a} = \vec{a}k$;
2) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$;
3) $k\vec{0} = \vec{0}$;
4) $0\vec{a} = \vec{0}$; ;
5) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$;
6) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Ці властивості легко довести, прирівнявши координати векторів у правій і лівій частинах кожної рівності (зробіть це самостійно).

Спосіб побудови вектора $k\vec{a}$ за даними числом k і вектором $\vec{a}$ випливає з такої теореми.

Теорема (про довжину і напрям вектора $k\vec{a}$)

Довжина вектора $k\vec{a}$ дорівнює $|k||\vec{a}|$. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$ за умови $k > 0$ і протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$ за умови $k < 0$.

Доведення

□ Відкладемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ і $k\vec{a} = \overrightarrow{OB}$ від початку координат O. Якщо $\vec{a}(a_1; a_2)$, то $k\vec{a}(ka_1; ka_2)$, тобто $A(a_1; a_2)$, $B(ka_1; ka_2)$.

Рівняння прямої OA має вигляд $ax + by = 0$. Оскільки це рівняння задовольняють координати $x = a_1$ та $y = a_2$, то його задовольняють і координати $x = ka_1$ та $y = ka_2$, тобто точка B лежить на прямій OA. Зауважимо, що координати будь-якої точки променя OA мають ті самі знаки, що й координати точки A, а координати будь-якої точки променя, доповняльного до OA, — знаки, протилежні знакам координат точки A. Тому за умови $k > 0$ точка B лежить на промені OA (рис. 106, *а*), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow k\vec{a}$, а за умови $k < 0$ точка B лежить на промені, доповняльному до OA (рис. 106, *б*), тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow k\vec{a}$.

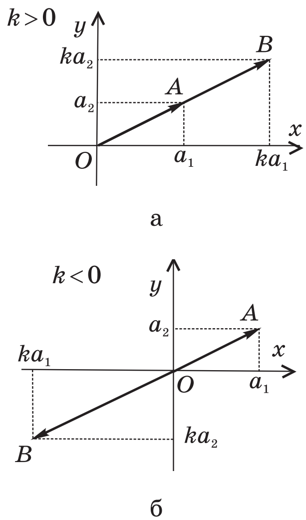


Рис. 106. Побудова вектора $k\vec{a}$

І нарешті, обчислимо довжину вектора $k\vec{a}$:

$$\left|k\vec{a}\right| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = \sqrt{k^2\left(a_1^2 + a_2^2\right)} =$$

$$= \left|k\right|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left|k\right|\left|\vec{a}\right|.$$

Теорему доведено. ■

Наслідок (властивість і ознака колінеарних векторів)

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові колінеарні вектори, то існує число k таке, що $\vec{b} = k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Ознаку колінеарних векторів обґрунтовано в щойно доведеній теоремі. Обґрунтуємо властивість колінеарних векторів. Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, виберемо $k = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$. Очевидно, що $k > 0$, тому вектори $\vec{b}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені і мають одну й ту саму довжину:

$$\left|k\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|.$$

Це означає, що $\vec{b} = k\vec{a}$. Аналогічно у випадку $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ слід вибрати $k = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$.

Щойно обґрунтований наслідок можна сформулювати інакше.

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні.

Узагалі, повертаючись до тлумачення поняття «векторна величина», слід зазначити, що, крім наявності числового значення й напряму, векторні величини характеризуються обов'язковою визначеністю для них операцій додавання і множення на число. Тому, наприклад, швидкість руху автомобіля є векторною величиною, а потік машин на вулиці міста (який також можна охарактеризувати числовим значенням і напрямом) — не векторна величина.

Задача

Доведіть, що точки $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$ і $C(-3;\ -6)$ лежать на одній прямій.

Розв'язання

Визначимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(1;\ 2)$, $\overrightarrow{AC}(-4;\ -8)$.

Зауважимо, що $\overrightarrow{(-4;-8)} = -4\cdot\overrightarrow{(1;\ 2)}$, тобто $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$. Це означає, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні, тобто мають лежати на одній прямій або на паралельних прямих. Але прямі AB і AC мають спільну точку A, тобто точки A, B і C лежать на одній прямій.

15.2. Скалярний добуток векторів

Означення

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Скалярний — від латинського «скаляр» — число.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Отже, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Сформулюємо властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ та числа k:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Доведіть ці рівності самостійно на основі означення скалярного добутку.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають *скалярним квадратом* вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^{\,2}$. Очевидно, що $\vec{a}^{\,2}=a_1^2+a_2^2=|\vec{a}|^2$.

Означення

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називається кут BAC.

Кутом між довільними ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок.

Побудову кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ показано на рис. 107. Цей кут позначають $\angle(\vec{a},\vec{b})$. Очевидно, що коли $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=0°$, а коли $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$, то $\angle(\vec{a},\vec{b})=180°$. Якщо $\angle(\vec{a},\vec{b})=90°$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *перпендикулярними* (пишуть так: $\vec{a}\perp\vec{b}$).

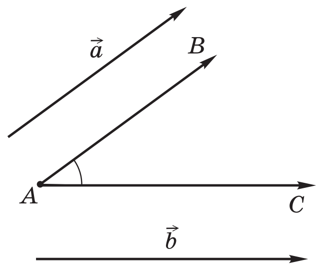


Рис. 107. Кут між векторами

Якщо кут між двома векторами відомий, то їх скалярний добуток можна виразити через довжини цих векторів.

Теорема (про скалярний добуток векторів)

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх довжин на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$

Доведення

□ Покажемо, що скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить від вибору системи координат. Справді,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$$

$$=\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2},$$

тобто $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Звідси $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$.

Таким чином, скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виражається через довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$, отже, не залежить від вибору системи координат.

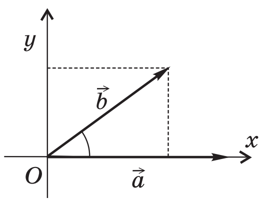


Рис. 108. До доведення теореми про скалярний добуток векторів

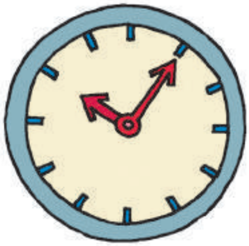
Виберемо систему координат так, як показано на рис. 108. У такому випадку вектор $\vec{a}$ матиме координати $\left|\vec{a}\right|$ і 0, а вектор $\vec{b}$ — координати $\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і $\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+0\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=$$

$$=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Теорему доведено. ■



Наслідок 1

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори, то

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Наслідок 2 (властивість і ознака перпендикулярних векторів)

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Для обґрунтування цього наслідку достатньо зауважити, що $\cos 90° = 0$.

Задача

За якого значення x вектори $\vec{a}\,(2; -1)$ і $\vec{b}\,(3; x)$ перпендикулярні?

Розв'язання

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні за умови $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Записавши цю умову в координатах, маємо: $2 \cdot 3 + (-1) \cdot x = 0$, $6 - x = 0$, $x = 6$.

Відповідь: 6.

Запитання і задачі

Усні вправи

508. У скільки разів довжина вектора $-3\vec{a}$ більша, ніж довжина вектора $\vec{a}$? Чи є правильним, що довжина вектора $k\vec{a}$ у k разів більша, ніж довжина вектора $\vec{a}$?

509. Дано ненульовий вектор $\vec{a}$. Визначте знак числа k, якщо:

а) вектори $\vec{a}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені;

б) вектори $-2\vec{a}$ і $k\vec{a}$ співнапрямлені;

в) вектори $k\vec{a}$ і $k^2\vec{a}$ протилежно напрямлені.

510. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 109). Знайдіть кут між векторами:

а) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;

б) $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$;

в) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$;

г) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DA}$;

д) $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AC}$;

е) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

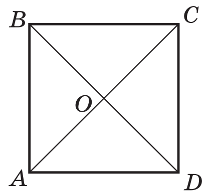


Рис. 109

511. Чи може скалярний добуток двох векторів дорівнювати нульовому вектору? Чи може скалярний квадрат ненульового вектора дорівнювати нулю?

512. Визначте, чи є кут між неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ гострим, прямим або тупим, якщо:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$; б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; в) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$.

513. Чи може скалярний добуток векторів дорівнювати добутку їхніх довжин? Якщо так, то в якому випадку?

Графічні вправи

514. Накресліть вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 110) у зошиті.

а) Побудуйте вектори $-2\vec{a}$, $3\vec{c}$, $0,25\vec{d}$.

б) Побудуйте вектори $0,5\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{c}+\vec{d}$, $2\vec{d}+3\vec{b}$.

в) Побудуйте вектори $2\vec{c}-\vec{a}$, $2\vec{a}-0,5\vec{d}$, $\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{d}$.

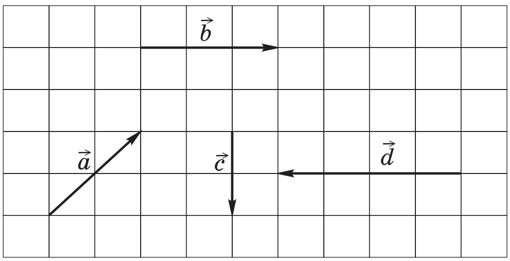


Рис. 110

515. Накресліть рівносторонній трикутник ABC.

а) Побудуйте кут між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$. Якою є його градусна міра?

б) Побудуйте вектор $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Який кут він утворює з вектором $\overrightarrow{BC}$?

в) Побудуйте вектор $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Письмові вправи

Рівень А

516. Знайдіть координати і довжину вектора $k\vec{a}$, якщо:

а) $\vec{a}\,(6;\ -8)$, $k = 0{,}5$;
б) $\vec{a}\,(5;\ 12)$, $k = 3$;
в) $\vec{a}\,(-1;\ -2)$, $k = -1$.

517. Довжина вектора $k\vec{a}$ дорівнює 10. Знайдіть k, якщо:

а) $\vec{a}\,(3;\ -4)$;
б) $\vec{a}\,(18;\ 24)$.

518. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{b} = k\vec{a}$, $k = -2$, $\vec{a}\,(-0{,}5;\ 3)$;
б) $\vec{a} = k\vec{b}$, $k = \dfrac{1}{3}$, $\vec{a}\,(-6;\ -9)$.

519. Доведіть, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ справджується рівність $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$.

520. На рис. 111 $AB = BC = CD = DE$. Виразіть через вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ вектори $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{CA}$.

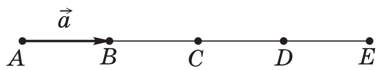


Рис. 111

521. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BM}$, якщо $\overrightarrow{AM}\,(2;\ -3)$.

522. Серед векторів $\vec{a}\,(-2;\ 3)$, $\vec{b}\,(8;\ 18)$, $\vec{A}(-4;\ -9)$ і $\vec{d}\,(-4;\ 6)$ назвіть пари колінеарних векторів. Які з даних векторів співнапрямлені, а які — протилежно напрямлені?

523. Вектори $\vec{a}\,(14;\ -8)$ і $\vec{b}\,(-7;\ x)$ колінеарні. Знайдіть x. Чи співнапрямлені ці вектори?

524. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}\,(7;\ -4)$, $\vec{b}\,(2;\ 3)$;
б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5\sqrt{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 30^\circ$.

525. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$;
б) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

526. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}\,(0;\ 4)$ і $\vec{b}\,(6;\ -2)$;
б) $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 120^\circ$;
в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо трикутник ABC рівносторонній зі стороною 6.

527. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a}(2;\ -1)$ і $\vec{b}(-4;\ -8)$; б) $\vec{a}(2;\ 1)$ і $\vec{b}(1;\ 3)$.

528. Доведіть, що ненульові вектори $\vec{a}(x;\ y)$ і $\vec{b}(y;\ -x)$ перпендикулярні.

529. За якого значення x вектори $\vec{a}(x;\ 4)$ і $\vec{b}(-2;\ 3)$ перпендикулярні?

Рівень Б

530. Дано вектори $\vec{a}(3;\ -1)$ і $\vec{b}(-4;\ 10)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{c} = 2\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$; б) $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

531. Дано вектори $\vec{a}(0;\ -3)$, $\vec{b}(-2;\ 1)$, $\vec{c} = k\vec{a} + 2\vec{b}$. Знайдіть k, якщо $\vec{c}(-4;\ 11)$.

532 (опорна). *Якщо відрізок BM — медіана трикутника ABC, то* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. Доведіть.

533 (опорна). *Якщо точки M і N — середини відрізків AB і CD, то* $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. Доведіть.

534. Відрізок BM — медіана трикутника ABC. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BM}$ вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$.

535. Дано ромб $ABCD$. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$.

536. Доведіть, що точки $A(-3;\ 1)$, $B(3;\ 4)$, $C(1;\ 3)$ лежать на одній прямій. Яка із цих точок лежить між двома іншими?

537. Дано точки $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 6)$, $C(7;\ 8)$, $D(11;\ x)$. Знайдіть значення x, за якого вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні. Чи співнапрямлені ці вектори?

538. За яких значень x вектори $\vec{a}(4;\ x)$ і $\vec{b}(x;\ 9)$ колінеарні? У кожному з випадків визначте, чи співнапрямлені дані вектори.

539. Знайдіть кути трикутника з вершинами $A\left(-1; \sqrt{3}\right)$, $B\left(1; -\sqrt{3}\right)$, $C\left(0{,}5; \sqrt{3}\right)$.

540. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $A(-5; 2)$, $B(-2; 1)$, $C(-1; 4)$.

541. Якщо неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають рівні довжини, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть.

542. Дано вектори $\vec{a}(1; 0)$ і $\vec{b}(1; 1)$. Знайдіть значення k, за якого вектори $\vec{a}+k\vec{b}$ і $\vec{a}$ перпендикулярні.

543. Дано вектори $\vec{a}(1; 8)$ і $\vec{b}(-3; 2)$. Знайдіть значення k, за якого вектори $\vec{a}+k\vec{b}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

Рівень В

544 (опорна).

а) *Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = m : n$, то* $\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, *де O — деяка точка площини.*

б) *Якщо точка C лежить на прямій AB, то* $\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+(1-p)\overrightarrow{OB}$, *де O — деяка точка площини, p — число.*

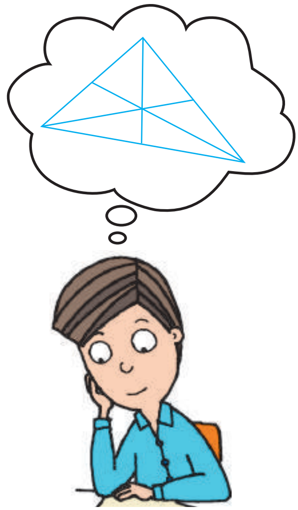
Доведіть ці твердження. Сформулюйте і доведіть обернені твердження.

545 (опорна). *Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC, які перетинаються в точці M. Доведіть, що:*

а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$;

б) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$;

в) *з відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 можна скласти трикутник.*



546 (опорна). *Якщо точка M — точка перетину медіан трикутника ABC, а точка O — деяка точка площини, то* $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. Доведіть.

547. Точка M — точка перетину медіан трикутника ABC. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{MA}$.

548. Точка M ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ у відношенні $BM : MC = 1 : 3$. Виразіть через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$.

549. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярні.

550. Дано вектори $\vec{a}\,(2; -1)$ і $\vec{b}\,(4; 3)$. Знайдіть значення k, за якого вектори $\vec{a} + k\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$ перпендикулярні.

551. Знайдіть:

а) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

б) $\vec{a}\vec{b}$, якщо $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 4$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2$;

в) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,
$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}) = 120°$.

552. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 56$.

Повторення перед вивченням § 16

Теоретичний матеріал

- середні лінії трикутника і трапеції; 8 клас, § 6
- властивості паралелограмів. 8 клас, § 2, 4

Задачі

553. Середня лінія трапеції дорівнює 33 см. Знайдіть основи трапеції, якщо їхні довжини відносяться як 3 : 8.

554. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін ромба, і визначте вид цього чотирикутника.

§16 Застосування векторів для розв'язування задач

16.1. Розв'язування геометричних задач векторним методом

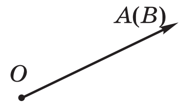
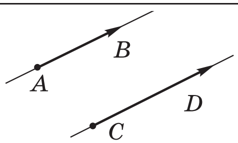
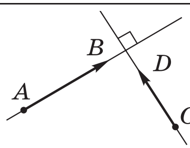
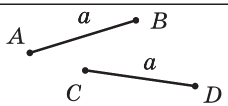
Використання векторів і векторних співвідношень під час розв'язування задач у деяких випадках дозволяє значно спростити міркування і розрахунки.

Застосування векторного методу передбачає три основні етапи.

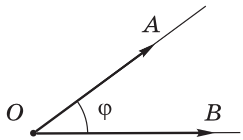
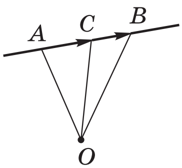
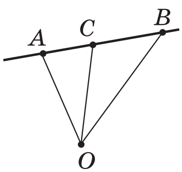
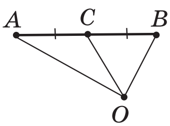
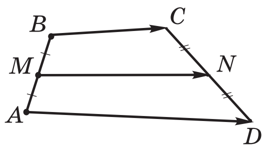
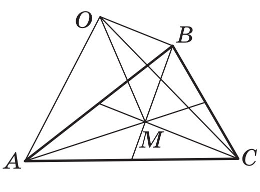
1) Сформулювати задачу мовою векторів. Для цього необхідно розглянути деякі з даних відрізків як вектори і скласти відповідні до умови задачі векторні рівності.
2) Перетворити складені рівності на основі відомих векторних співвідношень.
3) Перекласти отримані результати мовою геометрії.

Для подання геометричних співвідношень мовою векторів і навпаки зручно користуватися наведеною нижче таблицею.

Іноді векторний метод використовують у поєднанні з методом координат. У цих випадках подані векторні співвідношення доцільно записувати в координатній формі.

№ з/п	Рисунок	Твердження мовою геометрії	Твердження мовою векторів
1		Точки A і B збігаються	$\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ або $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка площини
2		$AB \parallel CD$	$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$, $k\neq 0$ (прямі AB і CD не збігаються)
3		$AB \perp CD$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$
4		$AB=CD=a$	$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=a^2$

Закінчення таблиці

№ з/п	Рисунок	Твердження мовою геометрії	Твердження мовою векторів
5		$\angle AOB = \varphi$	$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\lvert\overrightarrow{OA}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{OB}\right\rvert}$
6		Точка C лежить на прямій AB	$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ або $\overrightarrow{OC} = p\,\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка площини, k, p — деякі сталі, $k \neq 0$
7		$C \in AB$, $AC : CB = m : n$	$\overrightarrow{AC} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, де O — деяка точка площини, m, n — деякі сталі
8		C — середина AB	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ або $\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, де O — деяка точка площини
9		M — середина AB, N — середина CD	$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$
10		M — точка перетину медіан (центроїд) трикутника ABC	$\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$, де O — деяка точка площини

У деяких задачах доцільно вибрати на площині неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та виразити через них інші вектори, що розглядаються. Доведемо існування і єдиність такого подання.

Опорна задача (про розкладення вектора за двома неколінеарними векторами)

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори, то для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує розкладення $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, де m, n — деякі числа, причому таке розкладення єдине. Доведіть.

Розв'язання

□ Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — дані вектори, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 112, *а*). Проведемо через точки A і B прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Оскільки дані вектори неколінеарні, то ці прямі перетинаються в певній точці C, причому $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Оскільки за побудовою вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$ колінеарні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно, то існують числа m і n такі, що $\overrightarrow{AC} = m\vec{a}$ і $\overrightarrow{CB} = n\vec{b}$. Отже, $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Доведемо від супротивного єдиність такого розкладення. Нехай існує розкладення $\vec{c} = m_1\vec{a} + n_1\vec{b}$, причому справджується хоча б одна з умов $m_1 \neq m$ або $n_1 \neq n$. Припустимо, наприклад, що $m_1 \neq m$. Прирівнюючи два розкладення вектора $\vec{c}$, маємо:

$$m\vec{a} + n\vec{b} = m_1\vec{a} + n_1\vec{b}, \quad (m - m_1)\vec{a} = (n_1 - n)\vec{b}.$$

Оскільки $m_1 \neq m$, то $\vec{a} = \dfrac{n_1 - n}{m - m_1}\vec{b}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, що суперечить умові теореми. Отже, розкладення $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ єдине. ■

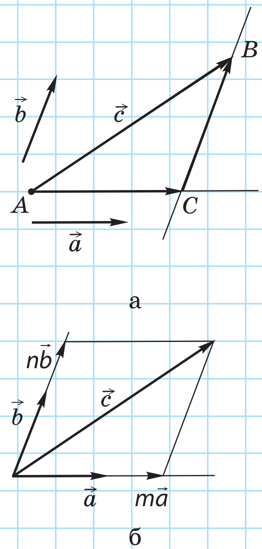


Рис. 112. Розкладення вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

На практиці для розкладення вектора за двома неколінеарними векторами можна використовувати також правило паралелограма. Для цього дані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ відкладають від однієї точки (див. рис. 112, *б*) і проводять через кінець вектора $\vec{c}$ прямі, паралельні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Задача

Точка перетину відрізків, що сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що даний чотирикутник — паралелограм.

Розв'язання

Нехай діагоналі чотирикутника *ABCD* перетинаються в точці *O*, точки *M* і *N* — середини сторін *AD* і *BC* відповідно (рис. 113). Позначимо $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$. Тоді $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Оскільки $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\overrightarrow{OD} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = n\vec{b}$, отже, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}\left(m\vec{a} + n\vec{b}\right)$, де *m* і *n* — деякі числа.

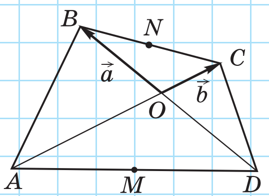


Рис. 113

За умовою задачі вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ колінеарні, отже, $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON}$, або $\frac{1}{2}(m\vec{a} + n\vec{b}) = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Звідси $(k - m)\,\vec{a} = (k - n)\,\vec{b}$. Але оскільки вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні, рівність можлива лише за умови $k = m = n$. Отже, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = k(\vec{b} - \vec{a})$, тобто вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні, звідки $BC \parallel AD$. Аналогічно можна довести, що $AB \parallel CD$. Таким чином, *ABCD* — паралелограм.

У прямокутній системі координат особливу роль відіграє розкладення вектора за векторами $\overrightarrow{e_1}\,(1;\,0)$ і $\overrightarrow{e_2}\,(0;\,1)$ — векторами одиничної довжини, співнапрямленими з осями координат (рис. 114). Такі вектори називають *координатними векторами*, або *ортами*. Коефіцієнти розкладання вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ за векторами $\vec{e_1}$ і $\vec{e_2}$ дорівнюють координатам вектора $\vec{a}$. Справді,

$\vec{a} \cdot \vec{e_1} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1$, $\vec{a} \cdot \vec{e_2} = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2$.

Отже, $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$.

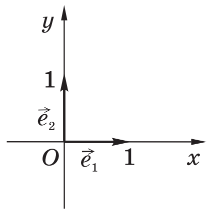
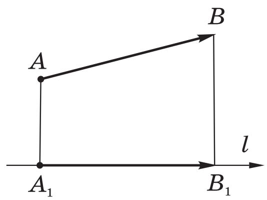
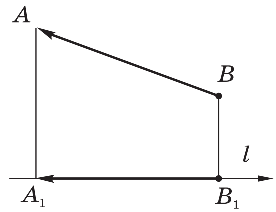


Рис. 114

Іноді, зокрема у фізичних задачах, розглядають поняття *проєкції вектора на вісь*. Для побудови векторної проєкції вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l через кінці даного вектора проводять перпендикуляри $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$ (рис. 115). Тоді вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ є проєкцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l. Скалярною проєкцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l є число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ (рис. 115, *а*), або число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$ (рис. 115, *б*).



а



б

Рис. 115. Проєкція вектора на вісь

16.2. Застосування колінеарності векторів

Властивості й ознаки колінеарних векторів під час розв'язування задач найчастіше використовуються в таких випадках:

1) для доведення паралельності прямих (променів, відрізків) — у цьому випадку треба довести, що вектори, які лежать на цих прямих, колінеарні, і ці прямі не мають спільних точок;

2) для доведення належності трьох точок одній прямій — у цьому випадку користуються тим, що належність точки C прямій AB випливає з колінеарності векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$;

3) для доведення того, що деяка точка ділить даний відрізок у заданому відношенні (зокрема, є його серединою) — у цьому випадку застосовують відповідні векторні рівності.

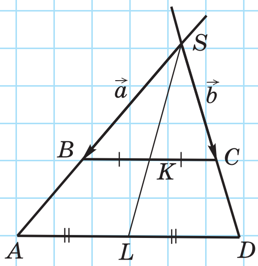


Рис. 116

Задача

Доведіть, що точка перетину продовжень бічних сторін трапеції і середини її основ лежать на одній прямій.

Розв'язання

Нехай у трапеції $ABCD$ точки K і L — середини основ BC і AD відповідно, S — точка перетину прямих AB і CD (рис. 116). Доведемо, що вектори $\overrightarrow{SK}$ і $\overrightarrow{SL}$ колінеарні.

Нехай $\vec{a}=\overrightarrow{SB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{SC}$. Тоді $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $\triangle SAD \backsim \triangle SBC$ за двома кутами, отже, $\frac{SA}{SB}=\frac{SD}{SC}=k$, звідки $\overrightarrow{SA}=k\vec{a}$, $\overrightarrow{SD}=k\vec{b}$. Маємо:

$$\overrightarrow{SL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB})=\frac{1}{2}(k\vec{a}+k\vec{b})=k\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=k\overrightarrow{SK},$$

тобто вектори $\overrightarrow{SK}$ і $\overrightarrow{SL}$ колінеарні. Це означає, що точки S, K і L лежать на одній прямій.

16.3. *Застосування скалярного добутку векторів*

Скалярний добуток векторів доцільно використовувати в таких випадках:

1) для доведення перпендикулярності прямих (променів, відрізків) — у цьому випадку достатньо показати, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю;

2) для знаходження довжини відрізка — для цього вектор $\vec{c}$, який зображується шуканим відрізком, розкладають за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (при цьому $\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{b}\right|$ і $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ мають бути відомі) і знаходять $\vec{c}^{\,2}=\left|\vec{c}\right|^2$;

3) **для знаходження величини кута** — у цьому випадку вектори, якими задано шуканий або даний кут, розкладають за двома неколінеарними векторами, довжини або відношення довжин яких відомі, і обчислюють косинус шуканого кута.

Задача

Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо медіани, проведені до його бічних сторін, взаємно перпендикулярні.

Розв'язання

Нехай дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC; AE і CD — медіани, $AE \perp CD$ (рис. 117). Нехай $\vec{a} = \overrightarrow{BD}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BE}$. Тоді $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b} - 2\vec{a}$. Оскільки за умовою $AE \perp CD$, то $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, тобто $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} - 2\vec{a}) = 0$.

Ураховуючи, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos B$ маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 = 0,$$

$$5|\vec{a}|^2 \cos B - 4|\vec{a}|^2 = 0, \quad \cos B = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\angle B \approx 37°$.

Відповідь: $\approx 37°$.

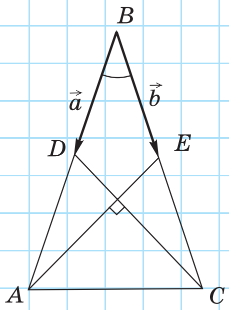


Рис. 117

Запитання і задачі

Усні вправи

555. Дано неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Чи є рівними вектори $3\vec{a} + 7\vec{b}$ і $7\vec{b} + 3\vec{a}$; $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $2\vec{b} - \vec{a}$? Чи є серед цих векторів колінеарні?

556. Назвіть:

а) координати вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = -3\overrightarrow{e_1} + 8\overrightarrow{e_2}$;

б) коефіцієнти m і n розкладення $\vec{a} = m\overrightarrow{e_1} + n\overrightarrow{e_2}$, якщо $\vec{a}\,(1; -2)$.

Письмові вправи

Рівень А

557. Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трапеції.
558. Доведіть векторним методом властивості середньої лінії трикутника.
559. Доведіть векторним методом, що діагоналі ромба перпендикулярні.
560. Доведіть векторним методом, що діагоналі прямокутника рівні.

Рівень Б

561. Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.
562. Доведіть векторним методом, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
563. На стороні AD і діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{6}AD$, $AN = \frac{1}{7}AC$. Доведіть, що точки M, N і B лежать на одній прямій.
564. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90°$) на катеті BC позначено точку K так, що $CK : KB = 2 : 1$. Доведіть, що середина медіани BM лежить на відрізку AK.

Рівень В

565. У трикутнику ABC (рис. 118) $AB = BC$, BD — висота, $DK \perp BC$, $DM = MK$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

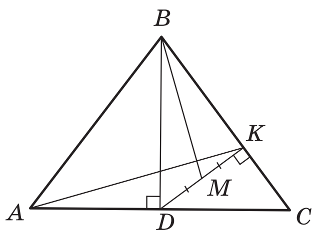


Рис. 118

566. Доведіть, що середини основ трапеції і точка перетину її діагоналей лежать на одній прямій.
567. Відрізок BD — медіана трикутника ABC, $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть кут ABD.
568. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $AB = 10$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$.

Повторення перед вивченням § 17

Теоретичний матеріал

- вписане й описане кола трикутника; 7 клас, § 23
- вписані й описані многокутники; 8 клас, § 15
- вписані кути. 8 клас, § 7

Задачі

569. Точка O — центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть:
а) кути AOB, BOC і AOC;
б) радіус кола, якщо сторона трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

570. Точка O — центр кола, вписаного в рівносторонній трикутник ABC. Знайдіть:
а) кути між радіусами, проведеними в точки дотику;
б) радіус кола, якщо сторона трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

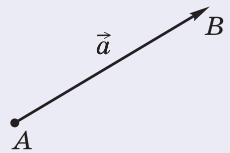
Задачі для підготовки до контрольної роботи № 4

1. Дано точки $A(2; -5)$ і $B(8; 3)$. Знайдіть координати і довжину вектора $\overrightarrow{AB}$.
2. Дано вектори $\vec{a}(0; 4)$ і $\vec{b}(-3; -2)$. Знайдіть вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
3. Дано прямокутник $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.
4. Знайдіть значення x, за якого вектори $\vec{a}(x; 2)$ і $\vec{b}(-3; 6)$:
а) колінеарні; б) перпендикулярні.
5. У рівносторонньому трикутнику ABC проведено медіани AM і BN. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
6. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(0; -2)$, $B(0; 1)$, $C(2; 2)$, $D(4; 0)$.

Онлайн-тестування

Підсумки розділу IV

ВЕКТОРИ



$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

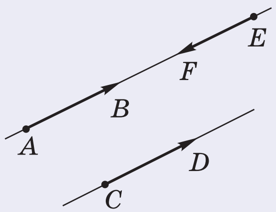
Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, яка точка є його початком, а яка — кінцем.

Координатами вектора $\vec{a}$ з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$ і $a_2 = y_2 - y_1$:

$$\vec{a}\left(a_1; a_2\right).$$

Модуль (довжина) вектора $\vec{a}\left(a_1; a_2\right)$ обчислюється за формулою

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

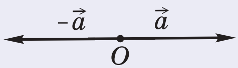


$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$,
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{EF}$

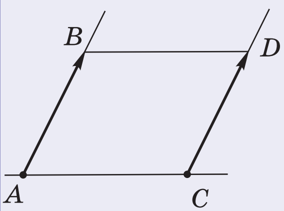
Ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *співнапрямленими* (або *однаково напрямленими*), якщо промені AB і CD співнапрямлені.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{EF}$ називаються *протилежно напрямленими*, якщо промені AB і EF протилежно напрямлені



Протилежними векторами називаються два протилежно напрямлені вектори однакової довжини



Два вектори називаються *рівними*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням.

Властивості й ознаки рівних векторів:

- Рівні вектори співнапрямлені та мають рівні довжини.
- Якщо вектори співнапрямлені і мають рівні довжини, то вони рівні.
- Від будь-якої точки можна відкласти вектор, що дорівнює даному, і притому тільки один.
- Рівні вектори мають рівні відповідні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідні координати рівні, то ці вектори рівні

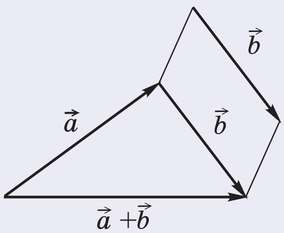
ДІЇ З ВЕКТОРАМИ

Додавання векторів

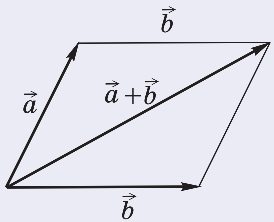
Сумою векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$ з координатами $c_1=a_1+b_1$, $c_2=a_2+b_2$, тобто

$$\overrightarrow{(a_1;\ a_2)}+\overrightarrow{(b_1;\ b_2)}=\overrightarrow{(a_1+b_1;\ a_2+b_2)}$$

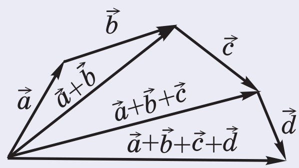
Побудова суми векторів



Правило трикутника



Правило паралелограма



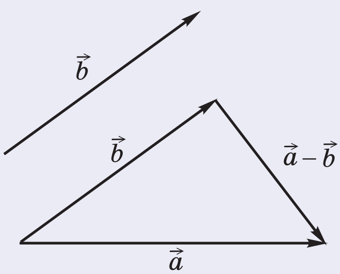
Правило многокутника

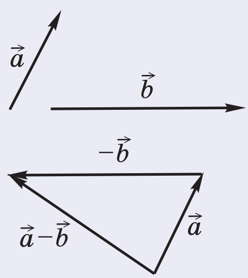
Віднімання векторів

Різницею векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається такий вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$:

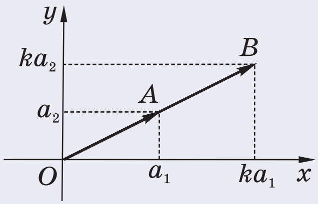
$$\overrightarrow{c(c_1;\ c_2)}=\overrightarrow{(a_1;\ a_2)}-\overrightarrow{(b_1;\ b_2)}=\overrightarrow{(a_1-b_1;\ a_2-b_2)}$$

Побудова різниці векторів

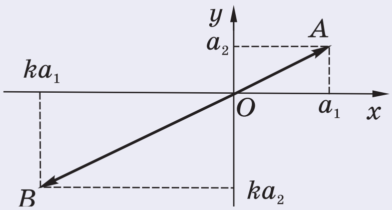




Множення вектора на число



якщо $k>0$, то вектор $k\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$



якщо $k<0$, то вектор $k\vec{a}$ протилежно напрямлений з вектором $\vec{a}$

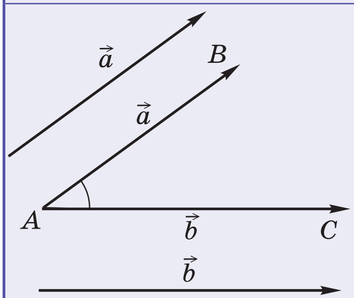
Добутком вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ на число k (або добутком числа k на вектор $\vec{a}$) називається вектор $k\vec{a}=\overrightarrow{(ka_1;\ ka_2)}$:

$$k\overrightarrow{(a_1;\ a_2)}=\overrightarrow{(ka_1;\ ka_2)},\quad |k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$$

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — колінеарні вектори, то існує число k таке, що $\vec{b}=k\vec{a}$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{b}=k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні

У колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, і навпаки: якщо у двох векторів відповідні координати пропорційні, то ці вектори колінеарні

Скалярний добуток векторів



$$\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle BAC$$

Скалярним добутком $\vec{a}\cdot\vec{b}$ векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають *скалярним квадратом*: $\vec{a}^2=a_1^2+a_2^2=|\vec{a}|^2$.

- Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}).$$
- Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори, то
$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$
- *Властивість і ознака перпендикулярних векторів*: якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, і навпаки: якщо для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справджується рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$

Контрольні запитання до розділу IV

1. Дайте означення вектора. Як зображають вектори?
2. Що таке довжина вектора? Який вектор називають нульовим?
3. Які вектори називають співнапрямленими; протилежно напрямленими; колінеарними?
4. Дайте означення рівних векторів.
5. Як визначити координати вектора? Як пов'язані координати рівних векторів?
6. Дайте означення суми і різниці двох векторів. Опишіть способи побудови вектора-суми і вектора-різниці.
7. Дайте означення добутку вектора на число. Сформулюйте теорему про довжину і напрям вектора $k\vec{a}$.
8. Дайте означення скалярного добутку векторів. Як визначається кут між векторами?
9. Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів. Сформулюйте властивість і ознаку перпендикулярних векторів.

Додаткові задачі до розділу IV

571. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O, причому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

572. У прямокутнику $ABCD$ AB = 8 см, BC = 15 см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{OD}\right|$.

573. Доведіть, що точки $A(8; 0)$, $B(4; 1)$, $C(0; 2)$ лежать на одній прямій. Яка із цих точок лежить між двома іншими?

574. Дано вектор $\vec{a}\,(1; -2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$, а вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

575. Дано вектори $\vec{a}\,(-1; -2)$ і $\vec{b}\,(-2; 1)$. Які кути утворюють ці вектори з вектором $\vec{a}+\vec{b}$?

576. У ромбі $ABCD$ AB = 6 см, $\angle A = 120°$. Знайдіть скалярні добутки $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

577. Плавець перетинає Сіверський Донець у місці, де річка має ширину 50 м, за 1 хв 40 с. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Знайдіть:
а) тангенс кута між вектором швидкості течії річки і вектором руху плавця (з урахуванням його знесення течією);
б) швидкість руху плавця (модуль вектора швидкості руху плавця).

578. Брусок ковзає вниз уздовж похилої площини. За даними рис. 119 знайдіть рівнодійну сил, що діють на брусок. Позначте проєкції всіх сил на осі x і y. Запишіть співвідношення між проєкціями. Використовуючи другий закон Ньютона $\left(\vec{F}=m\vec{a}\right)$, запишіть формулу для визначення прискорення руху бруска.

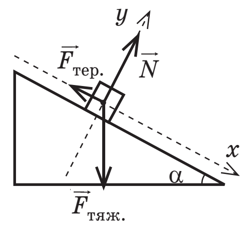


Рис. 119

579. Доведіть векторну нерівність $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \geqslant \left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|$. У якому випадку має місце рівність?

Задачі підвищеної складності

580. Дано довільний трикутник ABC. Доведіть, що вектор
$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\cdot\overrightarrow{AC}$$ напрямлений уздовж бісектриси кута A.

581. Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, а точка H задовольняє векторну рівність $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що H — ортоцентр трикутника ABC. Сформулюйте і доведіть обернене твердження (*формулу Гамільтона*).

582. Доведіть, що в трикутнику ABC ортоцентр H, центроїд M і центр описаного кола O лежать на одній прямій (*пряма Ейлера*), причому $MH = 2OM$.

583. Точки A, B і C задовольняють рівність $AC^2+BC^2=\frac{1}{2}AB^2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

584. Знайдіть кути між радіусами кола OA, OB і OC, якщо $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

585. Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

586. Точки M, N і K лежать на сторонах AB, BC і AC трикутника ABC відповідно. Доведіть, що прямі AN, BK і CM перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли $AM \cdot BN \cdot CK = BM \cdot CN \cdot AK$ (*теорема Чеви*).

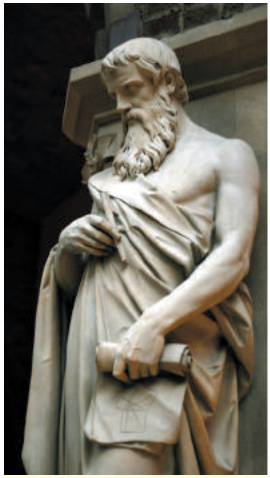
587. Доведіть, що для кута між прямими l_1 і l_2, заданими рівняннями $a_1x+b_1y+c_1=0$ і $a_2x+b_2y+c_2=0$ відповідно, справджується формула $\cos\angle\left(l_1,l_2\right)=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

Історична довідка

Інтерес до векторів і векторного методу виник у математиків у XIX ст. у зв'язку з потребами фізики й механіки. Але напрямлені відрізки зустрічаються ще в роботах піфагорійців і геометричній теорії відношень Евдокса (бл. 408–355 рр. до н. е.). У геометричному численні, що його виклав Евклід, додавання і віднімання чисел зводилося до відповідних операцій з відрізками, а множення — до побудови прямокутника зі сторонами, довжини яких дорівнюють множникам.

У XIV–XVI ст. геометрична алгебра через обмеженість засобів дослідження майже не розвивалася. Однак у 1587 р. фламандський учений Симон Стевін (1548–1620), розглядаючи додавання двох сил у роботі «Початки статики», дійшов висновку, що для визначення рівнодійної слід скористатися так званим «паралелограмом сил». Для позначення сил Стевін першим увів відрізки зі стрілками. Значно пізніше, у 1803 р., французький математик Луї Пуансо (1777–1859) розробив загальну теорію векторів, спираючись на дослідження попередників.

Подальший розвиток векторного методу пов'язаний зі становленням аналітичної геометрії і теорії геометричних перетворень. Вектор $\overrightarrow{AB}$ стали розглядати як паралельне перенесення, яке задано початковою точкою A та її образом B. Згодом відповідний розділ математики отримав назву «векторна алгебра».



Статуя на честь Евкліда у Музеї природничої історії Оксфордського університету

Пам'ятник Симону Стевіну в Брюгге (Бельгія)

«Сухопутна» яхта Стевіна

Математичні олімпіади

В’ячеслав Андрійович Ясінський (1957–2015)

В’ячеслав Андрійович Ясінський народився у 1957 році в селі Чернівці Могилів-Подільського району Вінницької області. Після школи та закінчення професійно-технічного училища він отримав спеціальність тракторист-комбайнер. Але душа юнака прагнула до занять математикою. У 1975 році В’ячеслав вступив на фізико-математичний факультет Вінницького державного педагогічного інституту імені Миколи Островського, який закінчив із відзнакою в 1979 році.

Після цього В. А. Ясінський працював у різних школах Вінниччини та у Вінницькому педагогічному інституті. З 1991 року він був членом журі, пізніше — експертом-консультантом, заступником голови журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, а з 1998 року — членом журі й експертом-консультантом Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка. Також він працював і в складі журі Всеукраїнських олімпіад для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, очолював математичні олімпіади рідної Вінниччини. Авторитет В’ячеслава Андрійовича був безмежним, його неперевершені професійні якості приваблювали математично обдаровану молодь. Варто відзначити, що науково-методичне забезпечення українських математичних змагань для обдарованих дітей значною мірою визначається творчістю В. А. Ясінського як автора яскравих задач. Серед вітчизняних авторів олімпіадних задач він був безсумнівним лідером, визнаним далеко за межами України. Задачі В’ячеслава Андрійовича двічі були представлені на Міжнародних математичних олімпіадах. Задачі Ясінського також неодноразово пропонувалися на «Турнірі чемпіонів», що традиційно кожного року проходить у місті Вінниця для учнівства з усіх куточків України.

Наведемо одну з олімпіадних задач В’ячеслава Андрійовича, у ході розв’язування якої варто застосувати методи осьової симетрії та повороту.

Дано трапецію $ABCD$, у якій $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$. Доведіть, що для довільної точки X площини виконується нерівність $XD - XA - XB \leqslant CD$.

Розв'язання

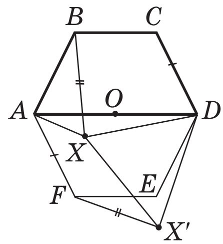


Рис. 120

Нехай точка O — середина основи AD даної трапеції (рис. 120). Побудуємо трапецію $AFED$, симетричну трапеції $ABCD$ відносно прямої AD, і виконаємо поворот навколо точки D на кут $60°$ проти годинникової стрілки. Тоді точка B перейде в точку F, а точка X — у деяку точку X'. Трикутник DXX' рівносторонній, $XB = X'F$, $CD = AF$.

Маємо: $XA + XB + CD = XA + FX' + AF \geqslant X'X = DX$.

Лаконічне і яскраве доведення нерівності демонструє красу методу геометричних перетворень і може надихнути вас на пошук свого оригінального способу розв'язання цієї задачі.

В. А. Ясінський не лише вмів створювати оригінальні задачі всіх рівнів складності, але й сам блискуче розв'язував олімпіадні задачі. Ще в шкільні роки він з успіхом брав участь у математичних змаганнях різних рівнів, а пізніше був неодноразовим переможцем авторитетних конкурсів для вчителів із розв'язування задач. В'ячеслав Андрійович безпосередньо підготував чимало переможців олімпіад. Зокрема, його вихованець є чотириразовим переможцем Міжнародних математичних олімпіад.

Доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського В. А. Ясінський є автором багатьох книг та статей, присвячених підготовці талановитої молоді до математичних змагань. Зокрема, однією з останніх праць майстра стала книжка «Геометричні перетворення в задачах математичних олімпіад».

В. А. Ясінський був членом редколегії журналу «У світі математики» з моменту його заснування в 1995 році, одним із ведучих розділу розв'язування задач журналу «Математика в школі».

За вагомий внесок у розвиток обдарованої молоді В. А. Ясінський у 2001 році отримав звання «Заслужений вчитель України». Мешканці Вінниці вшанували його званням «Людина року-2000» в номінації «Працівник освіти». Життєвий шлях В'ячеслава Андрійовича — це справжній взірець гідності, творчого горіння, вміння знаходити таланти та сприяти їхньому розквіту. В. А. Ясінський, інтелігентна, щира та чуйна людина, був талановитим у всьому — від блискучої розповіді анекдоту до найкропіткіших математичних досліджень. Видатний композитор математичних задач, незрівнянний викладач В'ячеслав Ясінський є справжньою гордістю України.

Готуємось до ДПА

Тест 4

Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Знайдіть довжину вектора $-\frac{1}{3}\vec{a}$, якщо $|\vec{a}|=6$.

А -2 Б 2 В -18 Г 18

2. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(2;-3)$ і $\vec{b}(-3;-4)$.

А -3 Б -18 В -72 Г 6

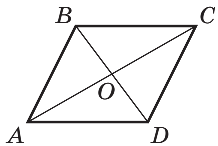
3. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження.

Ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можуть зображатися двома сторонами...

А рівностороннього трикутника. В квадрата.

Б гострого кута. Г прямокутного трикутника.

4. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Знайдіть вектор-суму $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



А $\overrightarrow{AC}$ В $\overrightarrow{DB}$

Б $\overrightarrow{BD}$ Г $\overrightarrow{CA}$

5. Знайдіть довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(0;2)$, $B(-4;5)$.

А 3 Б 10 В 2 Г 5

6. Знайдіть вектор $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-6;4)$, $\vec{b}(-2;-3)$.

А $\overrightarrow{(-1;5)}$ Б $\overrightarrow{(-4;-1)}$ В $\overrightarrow{(-1;7)}$ Г $\overrightarrow{(-5;5)}$

7. Дано одиничні взаємно перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдіть $(\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$.

А -2 Б -1 В 0 Г 1

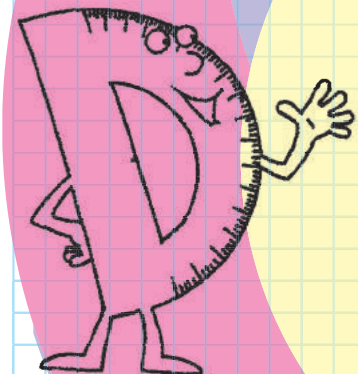
8. Серед наведених тверджень укажіть те, яке справджується для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А $|\vec{a}-\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$ В $0\cdot|\vec{a}|\leqslant|\vec{a}|$

Б $\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ Г $\vec{a}^2<|\vec{a}|^2$

Розділ V

Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга



Геометрія — наше велике творіння, яке нас самих захоплює.

Ле Корбюзьє, французький архітектор

Фігури, що мають рівні сторони та кути, здавна зачаровували людину досконалістю форми і таємничістю, яка завжди супроводжує досконалість. Такі фігури обожнювали, приписуючи їм магічні та навіть цілющі властивості. Многокутники з рівними сторонами й кутами прикрашали фамільні герби середньовічних можновладців, їх обирали символами таємних товариств, а дослідженню властивостей цих многокутників присвячували свої роботи найвидатніші математики минулого.

Вивчення правильних многокутників нерозривно пов'язане зі знаходженням довжини кола й площі круга. Недарма однією з класичних задач геометрії вважається задача про квадратуру круга — побудова квадрата, площа якого дорівнює площі даного круга. І хоча неможливість такої побудови за допомогою циркуля й лінійки вже давно доведено, вираз «квадратура круга» і сьогодні вживається для характеристики вкрай складних задач, що не мають розв'язку.

Згодом, розглядаючи фігури в просторі, ви познайомитеся з тривимірним аналогом правильних многокутників — правильними многогранниками.

§ 17 Вписане й описане кола правильного многокутника

17.1. Означення правильного многокутника. Існування вписаного й описаного кіл

Ви вже неодноразово зустрічалися з многокутниками, в яких усі сторони рівні, і з многокутниками, в яких усі кути рівні. Якщо обидві ці властивості многокутник має одночасно, такий многокутник є правильним.

Означення

Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні.

Уже відомими вам видами правильних многокутників є рівносторонній трикутник (рис. 121, *а*) і квадрат (рис. 121, *б*). На рис. 121 зображено також правильний п'ятикутник (рис. 121, *в*) і правильний шестикутник (рис. 121, *г*).

Оскільки сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$, *величина кута α_n правильного n-кутника обчислюється за формулою:*

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Нагадаємо, що многокутник є **вписаним у коло**, якщо всі його вершини лежать на цьому колі; многокутник є **описаним навколо кола**, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.

Теорема (про вписане й описане кола правильного многокутника)

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.

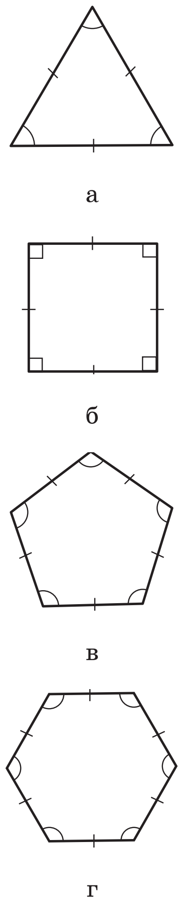


Рис. 121. Правильні многокутники

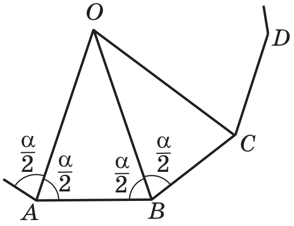


Рис. 122. До доведення теореми про вписане й описане кола правильного многокутника

Доведення

□ Нехай A, B, C і D — послідовні вершини правильного многокутника (рис. 122). Проведемо бісектриси кутів A і B. Вони перетинаються в певній точці O (поясніть чому). Трикутник AOB є рівнобедреним з основою AB, оскільки $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α — кут даного многокутника. Сполучимо точки O і C. Трикутники AOB і COB рівні за першою ознакою: у них сторона OB спільна, $AB = CB$ як сторони правильного многокутника, $\angle OBC = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, оскільки BO — бісектриса кута ABC. Отже, трикутник COB рівнобедрений з основою CB, $\angle OCB = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$, тобто CO — бісектриса кута BCD.

Продовжуючи цей процес далі, легко переконатися, що всі трикутники з вершиною O, основами яких є сторони даного правильного многокутника, рівнобедрені й рівні. Звідси випливає, що всі вершини даного многокутника лежать на колі із центром O, радіус якого дорівнює бічним сторонам цих трикутників. Крім того, всі сторони даного многокутника дотикаються до іншого кола із центром O, радіус якого дорівнює висотам цих трикутників, проведеним із вершини O. Теорему доведено. ■

Неважко переконатися, що будь-який правильний многокутник має єдине вписане і єдине описане кола (доведіть це самостійно). Точку, яка є спільним центром цих кіл, називають *центром правильного многокутника*.

Означення

Центральним кутом правильного многокутника називається кут, під яким сторону многокутника видно із центра цього многокутника.

Так, на рис. 122 кути AOB, BOC, COD, ... — центральні кути правильного многокутника. Очевидно, що *центральний кут правильного n-кутника дорівнює $\dfrac{360°}{n}$.*

17.2. Формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного многокутника

Радіуси вписаного й описаного кіл правильного n-кутника можна знайти, знаючи довжину його сторони і число n.

Теорема (формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного n-кутника)

Для правильного n-кутника радіуси вписаного й описаного кіл обчислюються за формулами

$$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}, \quad R = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}},$$

де r — радіус вписаного кола; R — радіус описаного кола; a_n — сторона n-кутника.

Доведення

□ Нехай O — центр правильного n-кутника зі стороною a_n, A і B — сусідні вершини цього n-кутника (рис. 123). Тоді в рівнобедреному трикутнику AOB бічні сторони OA і OB — радіуси описаного кола, а висота OC — радіус вписаного кола даного n-кутника.

Оскільки висота є також бісектрисою і медіаною трикутника AOB і центральний кут AOB дорівнює $\dfrac{360°}{n}$, то в трикутнику OCB $\angle C = 90°$, $CB = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a_n}{2}$, $\angle COB = \dfrac{1}{2}\angle AOB = \dfrac{180°}{n}$.

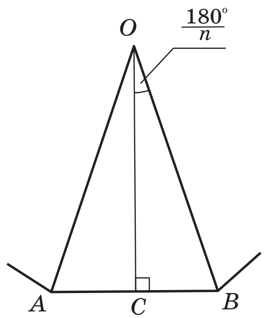


Рис. 123. До доведення формул радіусів вписаного й описаного кіл правильного n-кутника

Звідси

$$r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\angle COB} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}},$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\angle COB} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Теорему доведено. ■

Наслідок

Для правильного n-кутника зі стороною a_n при $n = 3$, 4, 6 радіуси вписаного й описаного кіл обчислюються за такими формулами.

n	r	R
3	$\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a_3}{\sqrt{3}}$
4	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{a_4}{\sqrt{2}}$
6	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$	a_6

Справді, для правильного (рівностороннього) трикутника ($n = 3$):

$$r = \frac{a_3}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}, \quad R = \frac{a_3}{2\sin\frac{180^\circ}{3}} = \frac{a_3}{\sqrt{3}};$$

для правильного чотирикутника (квадрата) ($n = 4$):

$$r = \frac{a_4}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{2}, \quad R = \frac{a_4}{2\sin\frac{180^\circ}{4}} = \frac{a_4}{\sqrt{2}};$$

для правильного шестикутника ($n = 6$):

$$r = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{a_6}{2\sin\frac{180^\circ}{6}} = a_6.$$

Задача

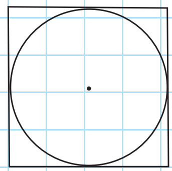
Площа квадрата, описаного навколо кола, дорівнює 48 см^2. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, вписаного в те саме коло.

Розв'язання

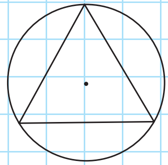
Нехай навколо кола описано квадрат з площею $S = 48$ см^2 (рис. 124, *а*). Тоді сторона квадрата $a_4 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ (см). Із формули $r = \frac{a_4}{2}$ маємо $r = 2\sqrt{3}$ (см). Знайдений радіус r є радіусом R описаного кола для рівностороннього трикутника (рис. 124, *б*), площу якого необхідно знайти. Оскільки $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$, то $a_3 = R\sqrt{3}$, отже, $a_3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см).

За формулою площі рівностороннього трикутника $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ маємо: $S = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $9\sqrt{3}$ см^2.



а



б

Рис. 124

Зауважимо, що у випадку, коли в задачі йдеться про вписаний і описаний правильні n-кутники, з метою уникнення непорозумінь із застосуванням формул сторони цих n-кутників можна позначати a_n і b_n відповідно.

17.3. Побудова правильних многокутників

Розглянемо способи побудови деяких правильних многокутників за допомогою циркуля і лінійки. Ви вже вмієте будувати правильний (рівносторонній) трикутник і квадрат. Для побудови інших видів правильних многокутників часто використовують описане коло.

Побудуємо правильний шестикутник зі стороною a (рис. 125). Оскільки сторона такого шестикутника дорівнює радіусу описаного кола,

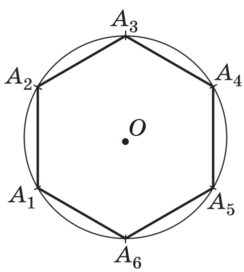


Рис. 125. Побудова правильного шестикутника

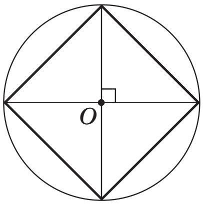


Рис. 126. Побудова вписаного квадрата

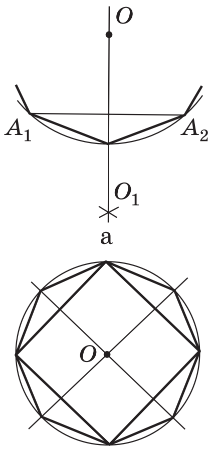


Рис. 127. Побудова правильного вписаного $2n$-кутника

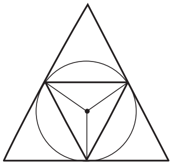


Рис. 128. Побудова правильного описаного трикутника

побудуємо спочатку коло радіуса a і позначимо на ньому довільну точку A_1. Далі з неї як із центра тим самим радіусом a проведемо дугу і на її перетині з побудованим колом позначимо точку A_2. Послідовно відкладаючи такі дуги, отримаємо точки A_3, A_4, A_5 та A_6 і послідовно сполучимо їх відрізками.

Узагалі, для побудови правильного вписаного многокутника достатньо побудувати його центральний кут. Наприклад, для квадрата він дорівнює 90°, отже, якщо провести через центр кола дві взаємно перпендикулярні прямі, то вони перетнуть дане коло у вершинах вписаного квадрата (рис. 126).

Якщо в коло вписано правильний n-кутник $A_1A_2...A_n$, то неважко побудувати правильний вписаний $2n$-кутник. Для цього достатньо розділити хорди A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 (а отже, і відповідні дуги) навпіл (рис. 127, *а*). На рис. 127, *б* показано, як, маючи вписаний квадрат, побудувати правильний вписаний восьмикутник. Застосовуючи цей спосіб, можна далі побудувати правильний 16-кутник, 32-кутник і взагалі правильний 2^k-кутник, де k — будь-яке натуральне число, більше за 2.

Для побудови правильного описаного n-кутника достатньо провести дотичні до кола у вершинах правильного вписаного n-кутника. На рис. 128 показано, як у такий спосіб побудувати правильний описаний трикутник.

Наведені приклади підтверджують, що багато видів правильних многокутників можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Однак не всі правильні многокутники допускають таку побудову. Наприклад, доведено, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати правильний сімнадцятикутник, але не можна побудувати правильний семикутник.

Запитання і задачі

Усні вправи

588. Чи є правильним многокутником рівнобедрений прямокутний трикутник; ромб із кутом 60°; прямокутник із нерівними сторонами? Чому?

589. Чи є правильним, що:
а) коли в трикутнику всі кути рівні, то він є правильним;
б) коли в чотирикутнику всі кути рівні, то він є правильним?

590. Сума кутів правильного многокутника дорівнює 180°. Яка градусна міра кута цього многокутника?

591. Чи можуть бісектриси кутів правильного многокутника і серединні перпендикуляри до його сторін перетинатися у двох різних точках? Чому?

592. Скільки кутів має правильний многокутник, у якому:
а) радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного кола;
б) радіус описаного кола дорівнює стороні?

593. Опишіть, як, маючи зображення правильного 18-кутника, побудувати правильний 9-кутник; правильний 36-кутник.

Графічні вправи

594. Побудуйте правильний шестикутник $ABCDEF$.
а) Проведіть діагональ AD. Визначте вид чотирикутників, на які вона ділить даний шестикутник.
б) Проведіть діагоналі AC і AE. Визначте вид утворених трикутників.

595. На аркуші паперу побудуйте правильний трикутник і виріжте його. Зріжте кути трикутника так, щоб отримати правильний шестикутник. У якому відношенні точки зрізу ділять сторони трикутника?

Письмові вправи

Рівень А

596. Визначте кількість сторін правильного многокутника, центральний кут якого дорівнює:
а) 90°; б) 72°; в) 20°.

597. Знайдіть кути правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 10$.

598. Визначте кількість сторін правильного многокутника, в якому:
а) центральний кут дорівнює $30°$;
б) сума кутів дорівнює $1800°$.

599. Доведіть, що діагональ правильного п’ятикутника паралельна одній із його сторін.

600. Доведіть, що найбільша діагональ правильного шестикутника ділить його на дві трапеції.

601. Знайдіть радіус кола:
а) вписаного в правильний трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см;
б) описаного навколо квадрата з площею 16 см^2;
в) вписаного в правильний шестикутник з периметром $36\sqrt{3}$ см.

602. Знайдіть:
а) площу рівностороннього трикутника, навколо якого описано коло радіуса 2 см;
б) діагональ квадрата, в який вписано коло радіуса $\sqrt{2}$ см;
в) периметр правильного шестикутника, навколо якого описано коло діаметром 8 см.

603. Заповніть таблицю формул для обчислення сторони a_n, радіуса R описаного і радіуса r вписаного кола для правильного n-кутника.

n	R через a_n	r через a_n	a_n через R	a_n через r	R через r	r через R
3						
4						
6						

604. Переріз терпуга має форму правильного трикутника зі стороною 3 см. Яким міг бути найменший діаметр круглого металевого стрижня, з якого виготовляють терпуг?

605. Поперечний переріз дерев’яного бруска є квадратом з діагоналлю $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть найбільший діаметр круглого стрижня, який можна виточити з такого бруска.

Рівень Б

606. Доведіть, що зовнішній кут правильного многокутника дорівнює його центральному куту.

607. Визначте кількість сторін правильного многокутника, кути якого дорівнюють:
а) $120°$; б) $108°$; в) $150°$.

608. Знайдіть:
а) периметр правильного многокутника зі стороною 5 см і внутрішнім кутом $144°$;
б) сторону правильного многокутника, периметр якого дорівнює 48 см, а внутрішній кут утричі більший, ніж зовнішній.

609. Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

610. Доведіть, що вершини правильного $2n$-кутника, взяті через одну, є вершинами правильного n-кутника.

611. Знайдіть:
а) площу правильного шестикутника, вписаного в коло, якщо площа квадрата, описаного навколо цього кола, дорівнює 64 см^2;
б) площу квадрата, описаного навколо кола, якщо площа правильного трикутника, вписаного в це коло, дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2;
в) радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника, якщо радіус кола, вписаного в цей шестикутник, дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

612. Знайдіть:
а) площу квадрата, вписаного в коло, якщо площа правильного шестикутника, вписаного в це коло, дорівнює $6\sqrt{3}$ см^2;
б) площу правильного трикутника, описаного навколо кола, якщо площа квадрата, описаного навколо цього кола, дорівнює 36 см^2;
в) радіуси описаного і вписаного кіл рівностороннього трикутника, якщо різниця цих радіусів складає 3 см.

613. Заповніть таблицю формул для обчислення площі S правильного n-кутника зі стороною a_n, радіусом R описаного кола і радіусом r вписаного кола.

n	S через a_n	S через R	S через r
3			
4			
6			

614. Доведіть, що серединні перпендикуляри до будь-яких двох сторін правильного многокутника перетинаються або збігаються.

615. Доведіть, що прямі, на яких лежать бісектриси будь-яких двох кутів правильного многокутника, перетинаються або збігаються.

Рівень В

616. Різниця зовнішніх кутів двох правильних многокутників становить 24°, а різниця сум усіх внутрішніх кутів цих многокутників становить 720°. Визначте кількість сторін кожного многокутника.

617. Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо:
а) сума чотирьох його внутрішніх кутів на 240° більша за суму решти кутів;
б) сума чотирьох внутрішніх і двох зовнішніх його кутів дорівнює 576°.

618. Правильний трикутник, квадрат і правильний шестикутник мають однакові периметри. Знайдіть відношення їхніх площ.

619. Правильний трикутник, квадрат і правильний шестикутник вписані в одне коло. Знайдіть відношення їхніх площ.

620. Побудуйте правильний шестикутник із периметром 12 см. Обчисліть площу побудованого шестикутника.

621. Впишіть квадрат у коло радіуса 3 см. За допомогою вписаного квадрата побудуйте правильний восьмикутник, вписаний у це коло.

622. Побудуйте коло радіуса 3 см. Для цього кола побудуйте правильні вписаний і описаний шестикутники та обчисліть відношення їхніх площ. Чи залежить воно від довжини радіуса кола?

623. Впишіть у коло правильний восьмикутник. Обчисліть його площу, якщо радіус кола дорівнює R.

624. Доведіть формулу залежності сторони a_{2n} правильного вписаного $2n$-кутника від радіуса R описаного кола і сторони a_n правильного вписаного n-кутника (*формулу подвоєння числа сторін правильного вписаного многокутника*):

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Користуючись цією формулою, виразіть через R сторони правильних вписаних восьмикутника та дванадцятикутника.

625. Впишіть у коло даного радіуса R правильний десятикутник.
а) Доведіть, що сторона a_{10} побудованого десятикутника і радіус R кола відносяться в «золотому перерізі».
б) Впишіть у це коло правильний п'ятикутник.

626. Дано правильний n-кутник. Доведіть, що сума n рівних за модулем векторів із початками у серединах сторін цього n-кутника, перпендикулярних до відповідних сторін і побудованих зовні многокутника, дорівнює нульовому вектору.

Повторення перед вивченням § 18

Теоретичний матеріал

- коло і круг; 7 клас, § 19
- вписані кути; 8 клас, § 7
- поняття площ. 8 клас, § 16

Задачі

627. Два кути трикутника дорівнюють $15°$ і $85°$. Знайдіть центральні кути, під якими сторони даного трикутника видно з центра описаного кола.

628. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а його площа 24 см^2. Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл трикутника.

§ 18 Довжина кола і площа круга

18.1. Довжина кола і дуги кола

Отримати наочне уявлення про довжину кола досить просто — для цього достатньо, наприклад, уявити, що коло є металевим обручем, який можна розрізати в довільній точці A і розпрямити (рис. 129). Отримаємо відрізок AA_1, довжина якого і є довжиною кола.

Рис. 129. Наочне уявлення про довжину кола

Сформулювати строге означення довжини кола значно складніше. Розглянемо послідовність вписаних у коло правильних n-кутників. Периметр будь-якого з них може вважатися наближеним значенням довжини кола (рис. 130). У ході необмеженого зростання числа n такі n-кутники все ближче «прилягають» до кола, а їхні периметри все менше відрізняються від довжини кола.

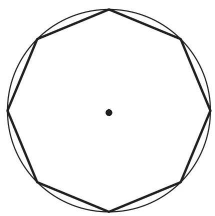


Рис. 130. До означення довжини кола

Отже, визначимо *довжину кола* як величину, до якої прямують периметри правильних n-кутників, вписаних у це коло, в ході необмеженого зростання числа n.

Перш ніж подати формулу довжини кола, сформулюємо важливу допоміжну теорему.

Теорема (про відношення довжини кола до його діаметра)

Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто є однаковим для будь-яких двох кіл.

Доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу геометрії. Тому наведемо лише загальну схему міркувань, на яких воно ґрунтується (повне доведення подане в Додатку 3).

Розглянемо два кола з радіусами R' і R'' та вписані в них правильні n-кутники з периметрами P_n' і P_n''. Оскільки $P_n = na_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n}$,

то $\frac{P_n'}{P_n''} = \frac{n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}}{n \cdot 2R'' \sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{R'}{R''}$, звідки $\frac{P_n'}{R'} = \frac{P_n''}{R''}$.

У ході необмеженого зростання n периметри n-кутників за означенням прямують до довжин відповідних кіл C' і C'', отже, помноживши обидві частини останньої рівності на $\frac{1}{2}$, маємо $\frac{C'}{2R'} = \frac{C''}{2R''}$, що й стверджує теорема.

Таким чином, для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є сталим числом. Це число прийнято позначати грецькою буквою π (читається «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi .$$

Доведено, що π — ірраціональне число, значення якого дорівнює 3,1415... . Великий грецький учений Архімед у III ст. до н. е. встановив, що раціональне число $\frac{22}{7}$ є наближеним значенням числа π. Для практичних обчислень зазвичай використовують значення $\pi \approx 3{,}14$.

Отже, *довжина кола радіуса R обчислюється за формулою $C = 2\pi R$.*

Визначимо довжину l дуги кола з градусною мірою α (рис. 131). Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то довжина дуги з градусною мірою 1° становить $\frac{2\pi R}{360}$, тобто $\frac{\pi R}{180}$.

Тому *довжина дуги кола з градусною мірою $\varphi = \alpha^\circ$ обчислюється за формулою*

$$l_\varphi = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

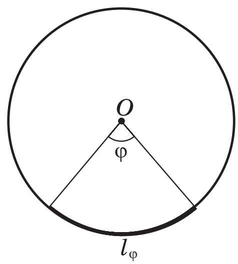


Рис. 131. Дуга кола. $\varphi = \alpha^\circ$

18.2. *Площа круга та його частин*

Нагадаємо, що поняття площі було визначено у 8 класі лише для многокутників. Для визначення площі круга скористаємось міркуваннями, аналогічними до тих, за якими визначалася довжина кола.

Отже, *площею круга*, обмеженого даним колом, будемо вважати величину, до якої прямує площа правильного n-кутника, вписаного в це коло, у ході необмеженого зростання числа n.

Теорема (формула площі круга)

Площа круга радіуса R обчислюється за формулою
$S = \pi R^2$.

Як і у випадку довжини кола, доведення цієї теореми виходить за межі шкільного курсу геометрії, тому знову наведемо лише загальну схему міркувань (доведення подане в Додатку 3).

Впишемо в дане коло радіуса R правильний n-кутник $A_1A_2 \ldots A_n$ зі стороною a_n, і в цей n-кутник впишемо ще одне коло радіуса r_n (рис. 132).

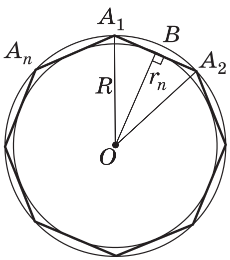


Рис. 132. До обґрунтування формули площі круга

Тоді:

$$S_{\triangle A_1OA_2} = \frac{1}{2} a_n r_n,$$

$$S_{A_1A_2 \ldots A_n} = nS_{\triangle A_1OA_2} = n \cdot \frac{1}{2} a_n r_n = \frac{1}{2} P_n r_n ,$$

де P_n — периметр n-кутника.

Із прямокутного трикутника A_1OB маємо: $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$. З необмеженим зростанням n дріб $\frac{180}{n}$ прямує до нуля, отже, значення $\cos\frac{180^\circ}{n}$ прямує до $\cos 0^\circ$, який дорівнює одиниці. З іншого боку, при зростанні n вписане коло «наближується» до описаного, r_n — до R, а периметр вписаного n-кутника — до довжини даного кола C. Отже, у ході необмеженого зростання n маємо:

$$S = \frac{1}{2}CR = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Задача

Довжина кола дорівнює 12π см. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

Розв'язання

Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то за умовою $2\pi R = 12\pi$, звідки $R = 6$ см — радіус даного кола. Отже, за формулою $S = \pi R^2$ маємо:

$$S = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 36π см^2.

Задача

Якою має бути довжина дроту, щоб зробити з нього коло, яке обмежує круг площею 154 см^2?

Розв'язання

Оскільки площа круга дорівнює πR^2, то за умовою $\pi R^2 = 154$. Ураховуючи, що $\pi \approx \frac{22}{7}$, маємо: $R = \sqrt{\frac{154}{\pi}} \approx \sqrt{\frac{154 \cdot 7}{22}} = 7$ (см) — радіус даного кола. Знайдемо довжину дроту за формулою $C = 2\pi R$: $C \approx \frac{2 \cdot 22 \cdot 7}{7} = 44$ (см).

Відповідь: ≈ 44 см.

Зауважимо, що в суто геометричних задачах відповідь можна подавати у вигляді буквеного виразу, який містить π, а в прикладних задачах бажано число π замінювати його наближеним значенням.

Означення

Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута.

Сектор — від латинського «сектор» — різець.

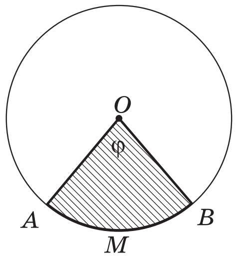


Рис. 133. Круговий сектор. $\varphi = \alpha^\circ$

На рис. 133 заштриховано круговий сектор, який відповідає меншому центральному куту AOB (або спирається на дугу AMB).

Оскільки площа круга дорівнює πR^2, то площа кругового сектора, що спирається на дугу 1°, дорівнює $\dfrac{\pi R^2}{360}$.

Отже, *площа кругового сектора, що спирається на дугу з градусною мірою $\varphi = \alpha^\circ$, обчислюється за формулою*

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Сегмент — від латинського «сегментум» — відрізок.

Круг можна розділити на частини і в інший спосіб — перетнувши його прямою. Частину круга, яка лежить по один бік від прямої, що перетинає цей круг, називають круговим сегментом.

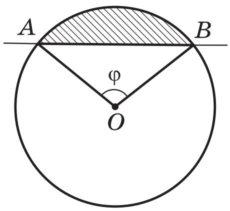
Унаслідок перетину круга з прямою AB утворюються два кругові сегменти: на рис. 134, *а* заштриховано менший із них, а на рис. 134, *б* — більший.

Площа сегмента, який не дорівнює півкругу, обчислюється за формулою

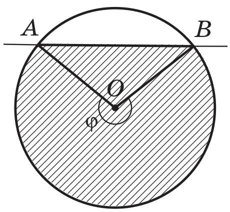
$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{\triangle},$$

де α — градусна міра дуги, що обмежує цей сегмент, $S_{\triangle}$, — площа трикутника з вершинами в центрі круга і на кінцях цієї дуги.

При цьому знак «+» треба обирати, коли $\alpha > 180^\circ$, а знак «−» — коли $\alpha < 180^\circ$. У випадку $\alpha = 180^\circ$ сегмент є півкругом, площа якого дорівнює $\dfrac{\pi R^2}{2}$.



а



б

Рис. 134. Круговий сегмент. $\varphi = \alpha^\circ$

18.3. *Гіпотеза в геометрії*

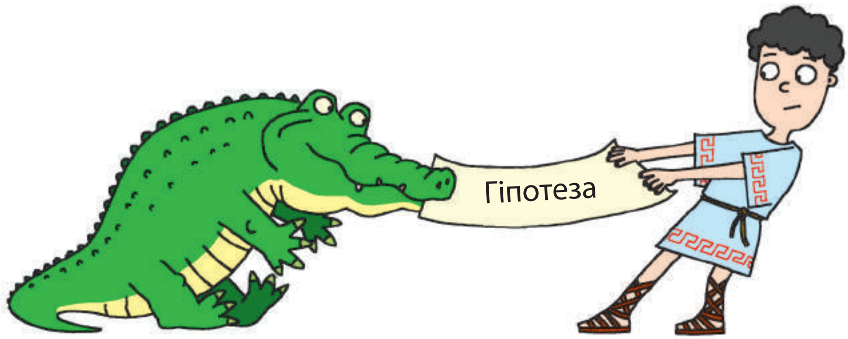
У деяких геометричних проблемах знайти шлях до розв'язання допомагає припущення про існування деякої фігури або деякого співвідношення, яке на момент початку розв'язування не є доведеним і не випливає безпосередньо з даних задачі. Так, при розгляданні понять «довжина кола» та «площа круга» ми припустили, що периметри правильних n-кутників, вписаних у те саме коло, прямують до певної величини при необмеженому зростанні числа n.

Подібні припущення в науці називаються гіпотезами.

Гіпотеза — від грецького «гіпотеза» — підстава, припущення.

Зазвичай гіпотези в геометрії використовуються саме на етапі аналізу умов задачі й визначення плану її розв'язування. Вони можуть стосуватися як однієї, так і декількох розглядуваних фігур — це насамперед припущення про рівність фігур або їх окремих елементів, про подібність фігур, паралельність або перетин прямих, належність точок одній прямій тощо. Досить часто знайти необхідну гіпотезу допомагає аналогія з раніше розв'язаними задачами. Дуже важливо, щоб у процесі подальших міркувань висунуту гіпотезу було доведено (або спростовано). Але інколи це стає дуже складною проблемою, яка потребує для розв'язання багато часу й зусиль.

Гіпотези відіграють важливу роль у науці. Всесвітньо відомий учений М. В. Ломоносов вважав гіпотезу «єдиним шляхом, яким визначні люди дійшли до відкриття найважливіших істин». Дійсно, деякі гіпотези докорінно змінювали цілі науки. Класичним прикладом таких революційних змін є Періодична таблиця хімічних елементів Д. І. Менделєєва. У ній видатний учений висловив гіпотезу про існування багатьох не відкритих на той час хімічних елементів. Однак не всі гіпотези завжди знаходили підтвердження. Так, вивчаючи процеси харчування коней, мавп, вовків, учені Середньовіччя висловили гіпотезу, що в усіх тварин під час жування рухається лише нижня щелепа. Але подальші дослідження виявили, що, наприклад, крокодил жує верхньою щелепою.



Знайдіть самостійно приклади гіпотез (не лише підтверджених, але й спростованих) з історії розвитку біології, фізики, хімії. Їх різноманітність і наукове значення стануть найпереконливішим аргументом на користь важливості гіпотез у процесі пізнання та навчання.

Запитання і задачі

Усні вправи

629. Визначте, як зміняться довжина кола і площа обмеженого ним круга, якщо:
 а) радіус кола збільшити втричі;
 б) діаметр кола зменшити в 5 разів.
630. Чи є правильним, що довжина кола більша за його потрійний діаметр?
631. Чи може площа правильного многокутника, вписаного в коло, бути більшою, ніж площа круга, обмеженого цим колом?

632. Круговий сектор спирається на дугу α. Визначте, чи є кут α гострим, прямим або тупим, якщо:
а) довжина дуги, яка обмежує сектор, становить чверть довжини кола;
б) площа сектора становить третину площі круга.

633. Із круга радіуса 4 вирізано сегмент. Визначте, чи є даний сегмент більшим або меншим за півкруг, якщо:
а) площа сегмента дорівнює 9π;
б) площа сегмента становить половину площі частини круга, що лишилася.

Графічні вправи

634. Впишіть у круг рівносторонній трикутник. Виділіть кольором сегменти, що утворилися. Яка градусна міра їхніх дуг?

635. Накресліть два круги зі спільним центром і радіусами 2 см і 3 см. Порівняйте на око площу меншого круга з площею утвореного кільця. Перевірте правильність порівняння обчисленням.

Письмові вправи

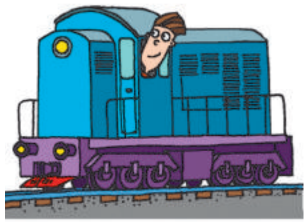
Рівень А

636. Знайдіть:
а) довжину кола, радіус якого дорівнює 6 см;
б) радіус кола, довжина якого дорівнює 12,56 см.

637. Знайдіть довжину кола:
а) вписаного у квадрат з площею 144 см^2;
б) описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною $4\sqrt{3}$ см;
в) описаного навколо правильного шестикутника з периметром 30 см.

638. Петрик, допомагаючи бабусі, набирав воду з колодязя. Хлопчик підрахував, що підняти відро можна за 20 обертів валу. Яка глибина колодязя (у м), якщо діаметр валу дорівнює 0,2 м? Вважайте, що $\pi = 3$.

639. На шляху 219,8 м колесо електровоза робить 50 обертів. Знайдіть діаметр колеса.



640. Обчисліть довжину колової орбіти штучного супутника Землі, якщо він обертається на відстані 330 км від земної поверхні, а радіус Землі дорівнює 6370 км.

641. Знайдіть довжину дуги кола радіуса R, якщо її градусна міра дорівнює:
а) $90°$; б) $135°$; в) $340°$.

642. Довжина маятника стінного годинника дорівнює 60 см, а кут його коливань — $30°$. Знайдіть довжину дуги, яку описує кінець маятника.

643. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина його дуги дорівнює 12,56 см, а градусна міра — $240°$.

644. Довжина кола циркової арени дорівнює 75,36 м. Знайдіть площу арени.

645. Знайдіть площу круга, обмеженого колом:
а) вписаним у правильний шестикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см;
б) описаним навколо квадрата з периметром $12\sqrt{2}$ см.

646. Знайдіть площу круга, обмеженого колом:
а) описаним навколо рівностороннього трикутника з висотою 6 см;
б) вписаним у квадрат з діагоналлю $14\sqrt{2}$ см.

647. Радіуси кіл стрілецької мішені дорівнюють 1, 2, 3 і 4 (рис. 135). Знайдіть площу кожного з трьох кілець мішені.

648. Дві труби водогону, внутрішні діаметри яких дорівнюють 10 см і 24 см, необхідно замінити однією, не змінюючи пропускної спроможності. Яким має бути внутрішній діаметр нової труби?

Рис. 135

649. Знайдіть площу кругового сектора з радіусом R і дугою α, якщо:
а) $R = 9$, $\alpha = 120°$; б) $R = 8$, $\alpha = 225°$; в) $R = 12$, $\alpha = 15°$.

650. Знайдіть площу більшого і меншого кругових сегментів, на які круг радіуса 1 ділиться хордою, що дорівнює радіусу.

Рівень Б

651. Знайдіть довжину кола:
а) вписаного в трикутник зі сторонами 8 см, 26 см і 30 см;
б) описаного навколо прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см;
в) вписаного в правильний шестикутник із площею $6\sqrt{3}$ см^2.

652. Довжина кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 12π см. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 13 см.

653. Знайдіть довжину кола:
а) вписаного в ромб із діагоналями 30 см і 40 см;
б) описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 14 см і 48 см.

654. На рис. 136 на сітці з одиничних квадратів зображено фігури, що складаються з дуг кіл із заданими центрами. Знайдіть:
а) периметр зображеної фігури (рис. 136, *а*);
б) площу зафарбованої частини круга (рис. 136, *б*).

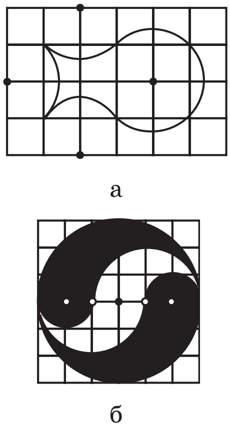


Рис. 136

655. На рис. 137 на сітці з одиничних квадратів зображено фігури, що складаються з дуг кіл із заданими центрами. Знайдіть:
а) периметр зображеної фігури (рис. 137, *а*);
б) площу зафарбованої частини круга (рис. 137, *б*).

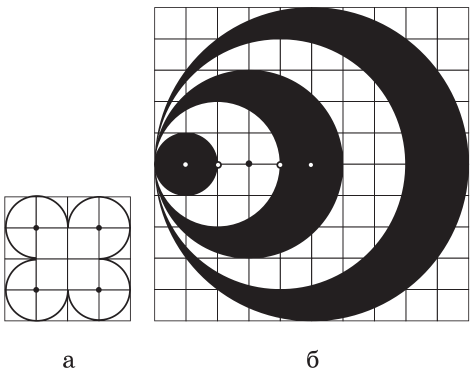


Рис. 137

656. Визначте довжини дуг, які описують протягом 2 годин кінці стрілок годинника на будівлі Харківського університету, якщо годинна стрілка має довжину 2,4 м, а хвилинна — 3,2 м.

657. Зі шматка металевого дроту, який має форму дуги кола радіуса 3 м, необхідно зварити кільце. Знайдіть радіус цього кільця, якщо градусна міра дуги становить $120°$.

658. Знайдіть площу круга, обмеженого колом:
а) описаним навколо рівнобедреного трикутника з основою 48 см і проведеною до неї медіаною 32 см;
б) вписаним у ромб з периметром 48 см і кутом $120°$.

659. Знайдіть площу круга, обмеженого колом:
а) описаним навколо прямокутника з меншою стороною 4 см і кутом між діагоналями $60°$;
б) вписаним у трикутник зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см.

660. Два кола мають спільний центр O (рис. 138). Доведіть, що площа утвореного кільця дорівнює добутку ширини кільця AB на довжину кола з тим самим центром і радіусом OC (C — середина AB).

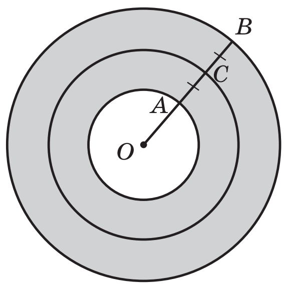


Рис. 138

661. Площа сектора з дугою $108°$ дорівнює S. Знайдіть радіус сектора.

662. Знайдіть площу кожного із сегментів, що лежать поза вписаним у коло радіуса R правильним n-кутником, якщо:
а) $n = 3$ (рис. 139, *а*);
б) $n = 4$ (рис. 139, *б*);
в) $n = 6$ (рис. 139, *в*).

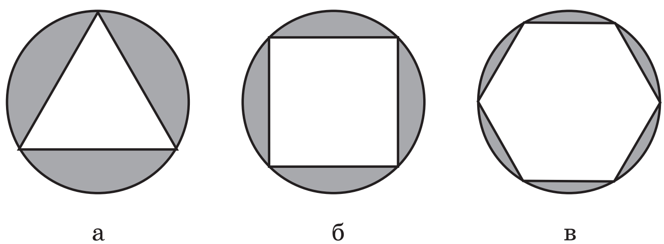
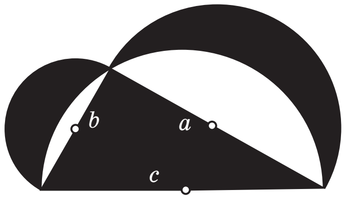


Рис. 139

663. Радіус круга дорівнює R. Знайдіть площу кругового сегмента, дуга якого дорівнює:
а) $60°$; б) $240°$.

Рівень В

664. За даними рис. 140:
а) доведіть, що площа зафарбованого трикутника дорівнює сумі площ зафарбованих «серпиків» (рис. 140, *а*);
б) знайдіть периметр фігури, яка зображена на сітці з правильних трикутників зі стороною 1 і складається з дуг кіл із заданими центрами (рис. 140, *б*).



а

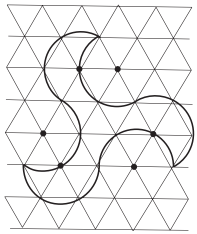
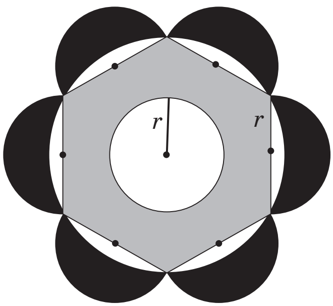

б

Рис. 140

665. За даними рис. 141:
а) доведіть, що площа зафарбованої фігури дорівнює сумі площ шести зафарбованих «серпиків» (рис. 141, *а*);
б) знайдіть периметр фігури, яка нарисована на сітці з одиничних квадратів і складається з дуг кіл із заданими центрами (рис. 141, *б*).



а

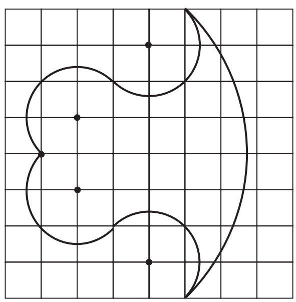

б

Рис. 141

666. Площа кругового сектора дорівнює 6π см^2, а довжина його дуги — 2π см. Знайдіть площу круга, вписаного в цей сектор (рис. 142).

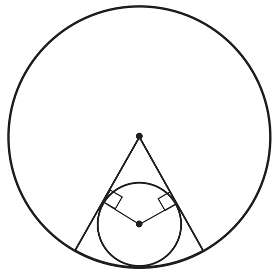


Рис. 142

667. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 25 см і 28 см. Коло з центром на найбільшій стороні трикутника дотикається до двох інших сторін. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом.

668. Коло ділить кожну сторону рівностороннього трикутника на три рівні частини завдовжки 2 см. Знайдіть площу частини трикутника, що лежить усередині кола.

Задачі для підготовки до контрольної роботи № 5

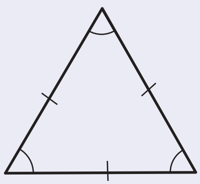
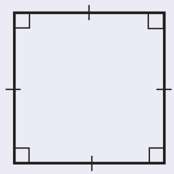
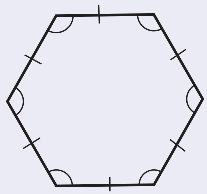
1. Знайдіть внутрішній і центральний кути правильного дванадцятикутника.
2. Площа круга, вписаного у квадрат, дорівнює 16π см^2. Знайдіть площу квадрата.
3. Знайдіть довжину кола, описаного навколо правильного шестикутника, найбільша діагональ якого дорівнює 14 см.
4. Правильний трикутник ABC вписано в коло. Знайдіть площу трикутника, якщо довжина дуги CAB складає 8π см.
5. Визначте кількість сторін правильного вписаного многокутника, якщо кожна сторона стягує дугу 3π см, а радіус описаного кола дорівнює 12 см.
6. Прямокутний трикутник з гіпотенузою 12 і гострим кутом $30°$ вписано в круг. Знайдіть площу кожного з сегментів, які відтинають сторони трикутника.

Онлайн-тестування

Підсумки розділу V

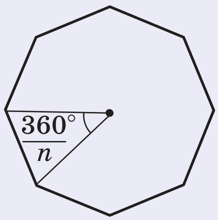
ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні

Правильний трикутник	Правильний чотирикутник (квадрат)	Правильний шестикутник
 $\alpha_3 = 60°$	 $\alpha_4 = 90°$	 $\alpha_6 = 120°$

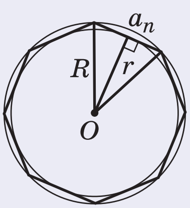
Формула для обчислення кута α_n правильного n-кутника:

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$



Центральним кутом правильного многокутника називається кут, під яким сторону многокутника видно із центра цього многокутника. Центральний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{360°}{n}$

ВПИСАНЕ Й ОПИСАНЕ КОЛА ПРАВИЛЬНОГО МНОГОКУТНИКА



Теорема про вписане й описане кола правильного многокутника

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло, і в будь-який правильний многокутник можна вписати коло, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються.

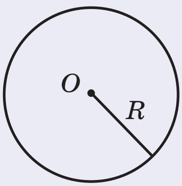
Правильний многокутник має єдине вписане і єдине описане кола

ФОРМУЛИ РАДІУСІВ ВПИСАНОГО Й ОПИСАНОГО КІЛ			
Для правильного *n*-кутника	Для правильного трикутника	Для квадрата	Для правильного шестикутника
$r = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}}$	$R = a_6$

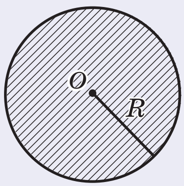
ФОРМУЛИ ДЛЯ КОЛА І КРУГА ТА ЇХ ЧАСТИН

Теорема про відношення довжини кола до його діаметра

Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто є однаковим для будь-яких двох кіл: $\dfrac{C}{2R} = \pi \approx 3{,}14$

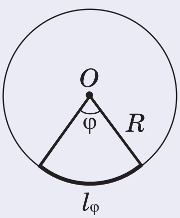


Довжина кола
$C = 2\pi R$

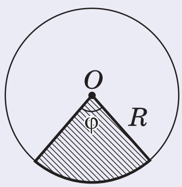


Площа круга
$S = \pi R^2$

Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута



Довжина дуги
$\varphi = \alpha^\circ$
$l_\varphi = \dfrac{\pi R}{180} \cdot \alpha$



Площа кругового сектора
$\varphi = \alpha^\circ$
$S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

Контрольні запитання до розділу V

1. Дайте означення правильного многокутника.
2. Доведіть формули радіусів вписаного і описаного кіл для правильного n-кутника.
3. Виразіть радіуси вписаного й описаного кіл:
   а) правильного трикутника зі стороною a;
   б) квадрата зі стороною a;
   в) правильного шестикутника зі стороною a.
4. Опишіть побудову правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника.
5. Сформулюйте теорему про відношення довжини кола до його діаметра. Назвіть наближене числове значення цього відношення. Як воно позначається?
6. Запишіть формули довжини кола і довжини дуги кола.
7. Запишіть формулу площі круга.
8. Опишіть круговий сектор. Запишіть формулу площі кругового сектора.

Додаткові задачі до розділу V

669. Сума внутрішніх кутів правильного многокутника вдвічі більша за суму його зовнішніх кутів. Знайдіть площу цього многокутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R.

670. У прямий кут вписано коло радіуса 4 см. Знайдіть периметр фігури, обмеженої сторонами кута і меншою дугою кола, що міститься між точками дотику.

671. Визначте, чи буде правильним рівносторонній многокутник, якщо він є:
   а) описаним навколо кола; б) вписаним у коло.

672. У коло вписані квадрат і правильний трикутник. Знайдіть площу трикутника, якщо площа квадрата дорівнює S.

673. Центри двох кіл, що перетинаються, лежать по різні боки від їхньої спільної хорди завдовжки a. Ця хорда в одному з кіл є стороною вписаного квадрата, а в іншому — стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл.

674. У сегмент, дуга якого дорівнює $120°$ і має довжину l, вписано коло найбільшого радіуса (рис. 143). Знайдіть довжину цього кола.

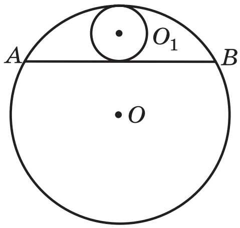


Рис. 143

675. Два кола мають спільний центр. Знайдіть площу утвореного кільця, якщо хорда більшого кола, яка дотикається до меншого, має довжину $2a$.

Задачі підвищеної складності

676. Відрізки, що сполучають середини кожної зі сторін квадрата з кінцями протилежної сторони, обмежують опуклий восьмикутник (рис. 144). Чи є він правильним?

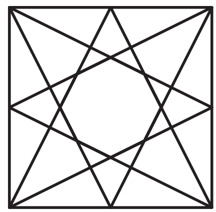


Рис. 144

677. Доведіть, що площа правильного шестикутника дорівнює $\frac{3}{4}$ добутку двох його нерівних діагоналей.

678. Сторона квадрата дорівнює a. Знайдіть довжину кола, яке проходить через кінці однієї сторони і дотикається до протилежної.

679. Доведіть, що будь-які два правильні n-кутники подібні.

680. Сторона квадрата дорівнює a. Кожна вершина квадрата є центром кола радіуса a (рис. 145). Знайдіть периметр криволінійного чотирикутника $ABCD$.

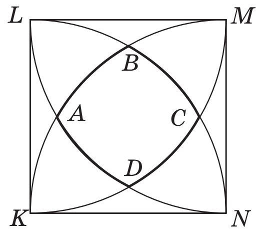


Рис. 145

681. Два кола з радіусами 3 см і 9 см дотикаються зовні в точці A. Певна пряма дотикається до цих кіл у точках B і C (рис. 146). Знайдіть площу криволінійного трикутника ABC і радіус кола, вписаного в нього.

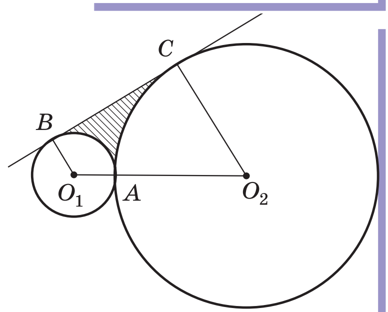


Рис. 146

682. Дано правильний n-кутник. Доведіть, що сума n векторів із початком у центрі цього n-кутника і кінцями в його вершинах дорівнює нульовому вектору.

Історична довідка

Інтерес людини до правильних многокутників виявлявся з прадавніх часів. Правильні чотирикутники, шестикутники і восьмикутники зустрічаються в культурах Давнього Єгипту і Вавилону у вигляді настінних зображень і прикрас із каменю. Давніх греків цікавила проблема поділу дуги кола на певну кількість рівних частин для побудови правильних вписаних многокутників. Дослідження піфагорійців із цього питання систематизував Евклід, який у четвертій книзі «Начал» описав побудову правильного 15-кутника циркулем і лінійкою. Побудувавши правильні n-кутники при $n = 3, 4, 5, 6, 8$, учені висловили гіпотезу про неможливість побудови правильного семикутника і дев'ятикутника.

Евклід

Карл Гаусс

Теоретичну можливість побудови правильного 17-кутника ще у 19-річному віці довів знаменитий німецький математик Карл Гаусс (1777–1855). Пізніше він встановив можливість побудови циркулем та лінійкою n-кутників, для яких $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_s$, де всі p_i — різні прості числа вигляду $2^{2^k} + 1$. З праць Гаусса та його послідовників випливає, що для інших значень n відповідні побудови за допомогою циркуля та лінійки є неможливими. Зокрема, це підтвердило гіпотезу давньогрецьких учених про неможливість такої побудови для правильного семикутника та дев'ятикутника. Але між висловленням гіпотези та її підтвердженням у даному випадку пройшло декілька століть.

Сам Гаусс вважав таке дослідження надзвичайно важливим та висловив побажання щодо зображення на його могилі правильного сімнадцятикутника.

Математичний папірус Рінда — давньоєгипетський навчальний посібник з арифметики і геометрії періоду Середнього царства, переписаний прибл. 1650 до н. е. переписувачем Ахмесом на сувій папірусу довжиною 5,25 метрів і шириною 33 см

За відсутності точних математичних розрахунків у минулі часи широко використовували приблизні обчислення й побудови. Але найширше наближені обчислення застосовували в задачах на знаходження довжини кола й площі круга. Ще в папірусі Рінда (XVII ст. до н. е.) зазначалося, що за площу круга слід брати площу квадрата зі стороною, що дорівнює $\frac{8}{9}$ діаметра: $S=\left(\frac{8}{9}\cdot 2R\right)^2=\frac{256}{81}R^2$, тобто для числа π обиралося наближення $\frac{256}{81}\approx 3{,}1605\ldots$ В інших єгипетських та вавилонських текстах зустрічається наближення $\pi \approx 3$, яке цілком влаштовувало тогочасних землемірів. Давні римляни за допомогою прямого вимірювання довжини кола мотузкою отримали наближення $\pi \approx 3{,}12$. Але першу спробу визначити число π на основі теоретичних міркувань здійснив у III ст. до н. е. славетний давньогрецький учений Архімед. У своїй роботі «Про вимірювання круга» на основі вимірювання периметрів описаних і вписаних многокутників він довів, що $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. Наближене значення $\pi=\frac{22}{7}\approx 3{,}14$, запропоноване Архімедом, використовується, як вам відомо, і в наш час.

Леонард Ейлер

З появою нових методів обчислень дослідження числа π продовжувалися. У 1736 р. всесвітньо відомий учений Леонард Ейлер обчислив π з точністю до 153-го десяткового знака. Саме він ввів в обіг позначення π (від першої букви грецького слова «периферія» — коло). У наші часи значення π обчислене з точністю до кількох сотень тисяч знаків, і в пресі час від часу з'являються повідомлення про нові «рекорди» точності цих обчислень. Але ці досягнення цікавлять хіба що книгу рекордів Гіннесса, адже ніякого практичного значення така точність не має — вона лише демонструє переваги сучасних засобів і методів обчислень.

Дослідження Архімеда і його послідовників започаткували напрям геометрії, який сьогодні часто виділяють в окремий розділ,— геометрію кіл.

Базельський університет, де навчався Леонард Ейлер

Математичні олімпіади

Міжнародні учнівські математичні олімпіади

Історію учнівських математичних олімпіад прийнято вести з 1894 року, коли в Угорщині відбулася перша олімпіада з математики для випускників гімназій. Відтоді в багатьох країнах склалася своя система традиційних національних олімпіад з математики. Так, з 1961 р. регулярно відбувається Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики.

У 1959 р. за ініціативою Румунського математичного та фізичного товариства в Румунії відбулася І Міжнародна математична олімпіада (ММО). У ній узяли участь команди з 7 країн. Відтоді це найпрестижніше міжнародне інтелектуальне змагання серед школярів старших класів проводиться кожного року (за винятком 1980 р.). В останні роки в ММО беруть участь понад 100 країн із 5 континентів. Чимало талановитих дітей з України перемагали в міжнародних математичних олімпіадах. Доречно пригадати Володимира Дрінфельда — харківського школяра, який у 15 років став абсолютним переможцем ММО. Згодом В. Дрінфельд став (єдиним в Україні!) вченим, який одержав найпрестижнішу міжнародну нагороду для молодих математиків — Філдсівську премію (у 1990 р.). Уперше офіційно окремою командою українські школярі взяли участь у ММО у 1993 р. З того часу понад 130 українських школярів стали переможцями міжнародних математичних олімпіад, з них більше 30 отримали золоті медалі. Також щорічно проходить Європейська математична олімпіада для дівчат. У 2019 р. у Києві українська команда посіла в ній перше місце, у 2020 р. українські дівчата стали срібними призерами. Гордість викликають ці вражаючі досягнення наших хлопців і дівчат!

Не менш значущим є всесвітнє визнання української методичної математичної школи. Ще в 1987 р. до комплекту завдань міжнародної математичної олімпіади потрапила така геометрична задача київського вчителя І. А. Кушніра. *У гострокутному трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці L, а коло, описане навколо трикутника ABC, — в точці N. З точки L проведено перпендикуляри до AB та AC з основами K та M відповідно. Доведіть, що чотирикутник AKNM та трикутник ABC є рівновеликими.*

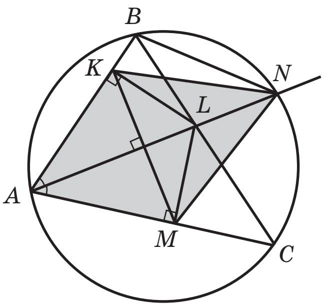


Рис. 147

Під час розв'язання цієї задачі варто застосувати геометричні формули та методи, які ви опанували в 9 класі. Розглянемо доведення.

З рівності прямокутних трикутників AKL та AML випливає, що трикутник KAM є рівнобедреним (рис. 147). Отже, бісектриса кута A перпендикулярна до його основи, тобто $AN \perp KM$. Звідси маємо: $S_{AKNM} = \frac{1}{2} AN \cdot KM$. З подібності трикутників ABN та ALC за двома кутами випливає, що $\frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AL}$, тобто $AN = \frac{AB \cdot AC}{AL}$. Отже, формула для обчислення площі чотирикутника $AKNM$ набуває вигляду $S_{AKNM} = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC}{AL} \cdot KM$.

З іншого боку, з трикутника AKL маємо: $AL = \frac{AK}{\sin \angle KLA}$. Враховуючи рівність кутів: $\angle KLA = \angle AKM = \angle AMK$, отримуємо: $AL = \frac{AK}{\sin \angle AMK}$. Застосувавши теорему синусів, з трикутника AKM маємо: $\frac{AK}{\sin \angle AMK} = \frac{KM}{\sin \angle KAM}$.

Таким чином, $S_{AKNM} = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC}{AL} \cdot KM = \frac{1}{2} \frac{AB \cdot AC}{\frac{KM}{\sin \angle KAM}} \cdot KM = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = S_{ABC}$. Отже, чотирикутник $AKNM$ і трикутник ABC є рівновеликими.

Готуємось до ДПА

Тест 5

Виберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Серед наведених формул укажіть формулу площі круга радіуса R.

А $S = 2\pi R$ Б $S = \frac{1}{2}\pi R^2$ В $S = \pi R^2$ Г $S = \pi^2 R$

2. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження.
У правильному многокутнику...
А кількість сторін більша за кількість кутів.
Б радіуси описаного і вписаного кіл збігаються.
В центри описаного і вписаного кіл збігаються.
Г внутрішній кут завжди більший за зовнішній.

3. Знайдіть довжину кола з діаметром 6 см.

А 36π см Б 12π см В 9π см Г 6π см

4. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата з діагоналлю 10 см.

А 10 см Б 5 см В $10\sqrt{2}$ см Г $5\sqrt{2}$ см

5. Знайдіть величину кута правильного шестикутника.

А 60° Б 720° В 108° Г 120°

6. Площа кругового сектора становить три чверті площі круга. Знайдіть центральний кут, який відповідає даному сектору.

А 90° Б 135° В 240° Г 270°

7. Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 45°.

А 4 Б 6 В 8 Г 12

8. Знайдіть периметр правильного многокутника зі стороною 2 см, якщо його центральний кут удвічі більший за внутрішній.

А 8 см Б 6 см В 12 см Г 16 см

Задачі на повторення курсу геометрії 7–9 класів

683. Точки B і C лежать на відрізку AD завдовжки 24 см. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 7$ см, $AC : CD = 3 : 1$.

684. Сума трьох кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює 220°. Знайдіть кут між даними прямими.

685. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіани AN і CM. Доведіть рівність трикутників:
а) ANM і CMN; б) ABN і CBM.

686. У трикутнику ABC бісектриса зовнішнього кута при вершині B паралельна стороні AC. Доведіть, що $AB = BC$.

687. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = 80°$, $\angle B = \angle B_1 = 55°$, $\angle C_1 = 45°$.

688. У прямокутному трикутнику ABC серединний перпендикуляр до гіпотенузи BC перетинає катет AB в точці M. Знайдіть гострі кути трикутника, якщо $\angle AMC = 50°$.

689. У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою BC проведено бісектрису CM. Відрізок MK — висота трикутника CMB. Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо $\angle AMK = 140°$.

690. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. У яких межах може змінюватися довжина третьої сторони, якщо кут між цими сторонами тупий?

691. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

692. Коло дотикається до сторін кута A в точках B і C. Бісектриса кута A перетинає це коло в точках M і N. Доведіть рівність трикутників MBN і MCN.

693. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ позначено точки M і N відповідно, причому $AM = CN = AB$. Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм, і знайдіть його кути, якщо $\angle A = 80°$.

694. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні. Доведіть, що середини сторін трапеції є вершинами квадрата.

695. Основу рівнобедреного трикутника видно із центра описаного кола під кутом 140°. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв’язків має задача?

696. Пряма, паралельна основі рівнобедреного трикутника, ділить бічні сторони у відношенні 3 : 5, починаючи від основи. Знайдіть довжину відрізка прямої, який міститься всередині трикутника, якщо середня лінія, що сполучає середини бічних сторін, дорівнює 8 см.

697. Бісектриса прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 100 см і 75 см. Знайдіть довжини відрізків, на які ділить гіпотенузу висота трикутника.

698. Знайдіть периметр і площу трикутника зі сторонами 8 см і 15 см та кутом між ними $60°$.

699. У трикутник зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см вписано коло. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в це коло.

700. Площа паралелограма дорівнює 21 см^2, а одна з його висот 3 см. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює $45°$.

701. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 6 см, а різниця основ 10 см. Знайдіть площу трапеції.

702. Знайдіть площу круга, в який вписано прямокутний трикутник із катетами 18 см і 24 см.

703. У трикутнику ABC $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть висоту BD.

704. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-6;\ 1)$, $B(3;\ 0)$, $C(4;\ 5)$. Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини B.

705. Дано точку $A(1;\ 2)$. Задайте:

а) центральну симетрію, внаслідок якої дана точка переходить у точку $B(-5;\ 4)$;

б) осьову симетрію, внаслідок якої дана точка переходить у точку $C(-1;\ 2)$;

в) паралельне перенесення, внаслідок якого дана точка переходить у точку $D(-4;\ -1)$;

г) поворот навколо початку координат, внаслідок якої дана точка переходить у точку $E(-2;\ 1)$;

706. Дано паралелограм $ABCD$. Знайдіть $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{AD}$.

707. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB}\,(-4;\ 3)$, $\overrightarrow{BC}\,(7;\ 1)$.

Додатки

Додаток 1. Паралельне перенесення в декартовій системі координат

Застосування паралельного перенесення в геометрії часто пов'язане з декартовою системою координат. Доведемо відповідні формули паралельного перенесення у два етапи.

Обґрунтуємо спочатку, що для будь-яких точок A і B існує паралельне перенесення, яке переводить точку A в точку B, і притому єдине.

Очевидно, що таке паралельне перенесення f існує — в напрямі променя AB на відстань AB. Доведемо, що будь-яке паралельне перенесення g, яке переводить точку A в точку B, збігається з f.

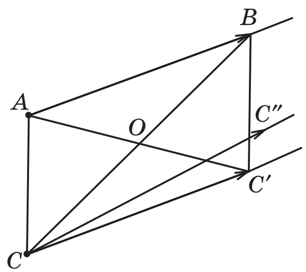


Рис. 148. До обґрунтування єдиності паралельного перенесення

Нехай C — довільна точка площини. Розглянемо випадок, коли C не лежить на прямій AB (рис. 148). Нехай точка C' — образ точки C при паралельному перенесенні f, а точка C'' — образ точки C при паралельному перенесенні g.

Оскільки $AB = CC'$, а промені AB і CC' співнапрямлені, то $ABC'C$ — паралелограм за ознакою. Отже, точка O — середина відрізка CB — є серединою відрізка AC'. Аналогічно доводимо, що точка O є серединою відрізка AC''. Звідси випливає, що точки C' та C'' збігаються. Нескладно доводиться їх збіг і у випадку, коли C лежить на прямій AB (зробіть це самостійно).

Отже, оскільки точка C довільна, паралельні перенесення f і g збігаються, що й треба було довести.

Доведемо тепер теорему про задання паралельного перенесення формулами в декартовій системі координат.

Теорема (формули паралельного перенесення в прямокутній системі координат)

У прямокутній декартовій системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $(x; y)$ фігури F в точку $(x'; y')$ фігури F', задається формулами: $x' = x + a$, $y' = y + b$, де a і b — числа, однакові для всіх точок фігури F.

Доведення

□ Доведемо спочатку, що перетворення будь-якої точки $(x; y)$ у точку $(x'; y')$, де $x' = x + a$, $y' = y + b$, a і b — сталі, є паралельним перенесенням.

Розглянемо довільні точки $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, що переходять у точки $A'(x_1 + a;\ y_1 + b)$, $B'(x_2 + a;\ y_2 + b)$ відповідно. Нехай точка B не належить прямій AA' (рис. 149). Тоді середини відрізків AB' та BA' мають координати $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + a}{2}; \dfrac{y_1 + y_2 + b}{2}\right)$, тобто збігаються.

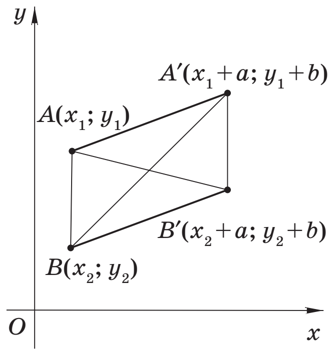


Рис. 149. До доведення формул паралельного перенесення

Отже, чотирикутник $AA'B'B$ — паралелограм за ознакою. Тому промені AA' та BB' співнапрямлені, а довжини відрізків AA' та BB' рівні. Такий самий висновок легко обґрунтувати й у випадку, коли точка B належить прямій AA'.

Оскільки за доведеним паралельне перенесення, яке переводить точку A в точку A', єдине, а дане перетворення $x' = x + a$, $y' = y + b$ є саме таким перенесенням, то паралельне перенесення в прямокутній декартовій системі координат задається формулами $x' = x + a$, $y' = y + b$. Теорему доведено. ■

Зазначимо, що коли задано точку $A(x; y)$ і точку $A'(x'; y')$, у яку переходить точка A внаслідок паралельного перенесення, то числа, що визначають це перенесення, легко знайти за формулами $a = x' - x$, $b = y' - y$.

Додаток 2. *Накладання, переміщення, подібність*

На початку вивчення курсу геометрії ми визначили, що рівними фігурами називаються ті, що суміщаються накладанням. Але поняття накладання було введено наочно, тому ми не розглядали докладно його властивості.

Під час вивчення теми «Переміщення» ми визначили рівні фігури як такі, що суміщаються переміщенням, тобто перетворенням, що зберігає відстані між точками. Можна встановити, що будь-яке переміщення на площині є накладанням, і навпаки, накладання на площині є переміщенням. Деталізуємо ці твердження для трикутників.

Теорема
(про тотожність накладання і переміщення трикутників)

Два трикутники суміщаються накладанням тоді й тільки тоді, коли існує переміщення, що переводить один із них в інший.

Доведення

□ 1) Нехай існує переміщення f, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$, зокрема точку A в A', B — у B', C — у C'. Тоді, за властивостями переміщення, відрізок AB накладається на відрізок $A'B'$, BC — на $B'C'$, AC — на $A'C'$; отже, трикутник ABC накладається на трикутник $A'B'C'$.

2) Нехай тепер трикутник ABC накладається на трикутник $A'B'C'$, тобто відповідні сторони й кути цих трикутників рівні. Доведемо існування переміщення, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$.

Розглянемо симетрію f_1 відносно прямої l_1 — серединного перпендикуляра до відрізка AA'. Унаслідок такого переміщення трикутник ABC переходить у трикутник $A_1B_1C_1$, причому точки A_1 і A' збігаються (рис. 150).

Розглянемо тепер симетрію f_2 відносно прямої l_2 — серединного перпендикуляра до відрізка B_1B' (якщо його кінці не збігаються). Тоді трикутник $A_1B_1C_1$ переходить у трикутник $A_2B_2C_2$, причому точки A_1, A_2 та A' збігаються, так само, як і точки B_2 та B'. За властивістю переміщення $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2 = \alpha$,

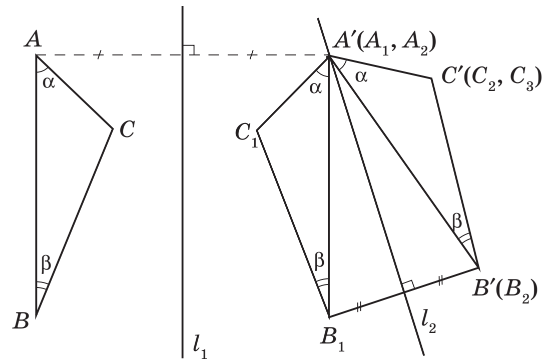


Рис. 150. До доведення теореми про тотожність накладання і переміщення трикутників

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2 = \beta$. Оскільки в результаті послідовного застосування переміщень f_1 та f_2 точка A переходить в A_2 (A'), B — у B_2 (B'), то відрізок AB суміщається з $A'B'$.

За умовою $\angle CAB = \angle C'A'B' = \alpha$, $\angle ABC = \angle A'B'C' = \beta$. Якщо точки C_2 та C' лежать по один бік від прямої $A'B'$, то з наведених рівностей кутів випливає збіг променів $A'C'$ та A_2C_2, $B'C'$ та B_2C_2; отже, точки C_2 та C' також збігаються. Тому трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$ в результаті послідовного виконання переміщень f_1 та f_2. Якщо ж C_2 та C' лежать по різні боки від прямої $A'B'$, то внаслідок симетрії f_3 відносно прямої $A'B'$ точка C_2 перейде в точку C_3, що збігається з C', і далі доведення є аналогічним до попереднього. Теорему доведено. ■

У процесі доведення другої частини теореми ми задали певне переміщення, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$, за допомогою осьових симетрій. Насправді, таке переміщення є єдиним.

Теорема (про однозначність задання переміщення)

Якщо під час деякого переміщення трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$, причому точка A — в точку A', B — в B', C — в C', то для будь-якої точки площини M її образ M' за умови такого переміщення визначається однозначно.

Доведення

□ Нехай існують два різних переміщення f та g, що переводять точку A — в A', B — у B', C — у C' (рис. 151). Нехай далі певна точка M внаслідок переміщення f переходить у точку M_1, а внаслідок переміщення g — у точку M_2, причому точки M_1 і M_2 не збігаються (рис. 152). Оскільки внаслідок переміщення зберігаються відстані між точками, то $AM = A'M_1 = A'M_2$, $BM = B'M_1 = B'M_2$, $CM = C'M_1 = C'M_2$. Отже, точки A', B' і C' лежать на серединному перпендикулярі до відрізка M_1M_2, що суперечить тому, що $A'B'C'$ — трикутник.

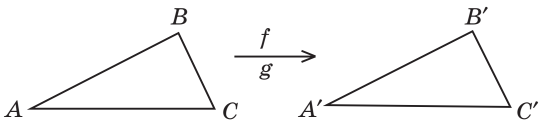


Рис. 151

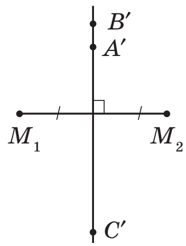


Рис. 152

Отже, переміщення f і g збігаються, що й треба було довести. ■

Аналогічного аналізу потребує й ситуація з подібними трикутниками. Спочатку, у восьмому класі, ми визначили подібні трикутники як такі, в яких відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні. Але у дев'ятому класі, під час вивчення подібності, ми визначили, що дві фігури є подібними, якщо вони суміщаються перетворенням подібності.

Покажемо, що ці означення подібності для трикутників є рівносильними.

1) Якщо трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$ внаслідок деякого перетворення подібності f з коефіцієнтом k, то $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$, тобто справджуються умови першого означення.

2) Нехай навпаки $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$. Розглянемо гомотетію f із центром у точці A і коефіцієн-

том k (рис. 153), яка переводить трикутник ABC у трикутник $A_1B_1C_1$ (A збігається з A_1).

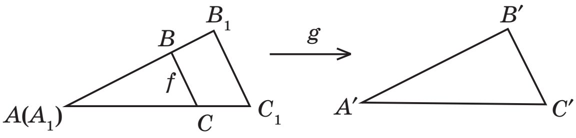


Рис. 153

Тоді $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ за трьома сторонами. Отже, за доведеною теоремою існує переміщення g, що суміщає трикутник $A_1B_1C_1$ з трикутником $A'B'C'$. Але тоді послідовне виконання f та g є перетворенням подібності, що суміщає трикутник ABC з трикутником $A'B'C'$, що й треба було довести. ■

Таким чином, ті означення рівних (подібних) трикутників, які зустрічались під час вивчення різних розділів геометрії, рівносильні.

Додаток 3. Довжина кола і площа круга

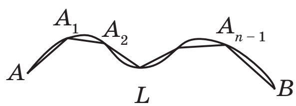


Рис. 154. Довжина кривої

Розглянемо криву лінію L, що сполучає точки A і B. Розіб'ємо її точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ на n частин і розглянемо фігуру, що складається з відрізків AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}B$ — ламану $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}B$ (рис. 154). Назвемо таку ламану вписаною в криву L.

Довжиною кривої L називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, коли число ланок необмежено зростає, а їх довжини наближаються до нуля.

Такий самий підхід можна застосувати і для визначення довжини кола. При цьому ламана буде многокутником, вписаним у це коло (рис. 155).

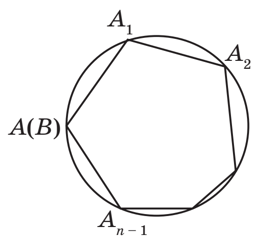


Рис. 155. До означення довжини кола

Однак для коректності такого означення потрібно довести, що вказана границя існує. Це доволі складна проблема, яка розв'язується засобами іншої математичної науки — математичного аналізу. Тому визначимо довжину кола таким чином*.

Розглянемо послідовність P_{2^k} периметрів вписаних у дане коло правильних 2^k-кутників. Доведемо, що з необмеженим зростанням k ці периметри наближаються до певної межі C. Тоді число C ми називатимемо довжиною даного кола.

Доведемо спочатку допоміжне твердження (лему).

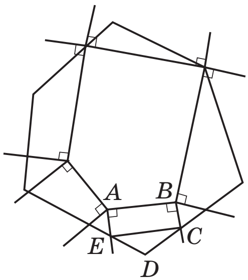


Рис. 156. До доведення леми про периметри опуклих многокутників

Лема (про периметри опуклих многокутників)

Якщо один опуклий многокутник міститься всередині іншого опуклого многокутника, то периметр першого менший, ніж периметр другого.

Доведення

□ Із вершин внутрішнього многокутника проведемо промені, які перпендикулярні до його відповідних сторін та перетинають сторони зовнішнього многокутника (рис. 156).

Тоді за нерівністю трикутника $AB \leqslant CE < CD + DE$, і т. д.

Отже, периметр внутрішнього многокутника менший за периметр зовнішнього. ■

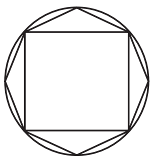


Рис. 157

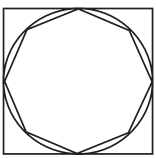


Рис. 158

Із доведеної леми випливають такі наслідки.

1) Периметр правильного 2^k-кутника, вписаного у певне коло, менший від периметра правильного 2^{k+1}-кутника, вписаного у те саме коло (рис. 157).

2) Периметр будь-якого правильного вписаного в коло многокутника менший від периметра будь-якого правильного многокутника, описаного навколо того самого кола (рис. 158).

Отже, послідовність P_{2^k} зростає зі зростанням k і обмежена зверху периметром квадра-

* Можна довести, що таке означення буде рівносильним попередньому.

та, описаного навколо даного кола: $P_{2^k} < P_{2^{k+1}}$, $P_{2^k} < 8R$. Тоді за теоремою Веєрштрасса з курсу математичного аналізу існує границя C, до якої наближається P_{2^k} зі зростанням k, тобто довжина кола.

Доведемо, що відношення довжини кола до його діаметра є числом сталим для всіх кіл (позначається π).

Впишемо в кожне з двох довільних кіл радіусів R та R' правильні 2^k-кутники (рис. 159).

Тоді $P_{2^k} = 2^k \cdot 2 \cdot R \sin\frac{180°}{2^k}$, $P'_{2^k} = 2^k \cdot 2 \cdot R' \sin\frac{180°}{2^k}$.

Отже, $\frac{P_{2^k}}{P'_{2^k}} = \frac{2R}{2R'}$.

Звідси за умови необмеженого зростання k маємо $\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'}$, що й треба було довести.

Отже, $C = \pi d = 2\pi R$.

Зазначимо, що периметри Q_{2^k} правильних 2^k-кутників, описаних навколо кола, наближаються до його довжини C з необмеженим зростанням k.

Розглянемо правильний 2^k-кутник $AB...M$, описаний навколо кола радіуса R. Проведемо дотичні G_1F_1, K_1L_1, ..., P_1H_1 перпендикулярні до відрізків AO, BO, ..., MO. При цьому утвориться 2^{k+1}-кутник $G_1F_1K_1L_1 \ldots H_1$. Покажемо, що він правильний (рис. 160). Використовуючи властивості правильного описаного многокутника $AB...M$, маємо: $AO = BO$, $ON = OT = R$, звідси $AN = BT$. Таким чином, отримали рівність прямокутних трикутників: $\triangle G_1AN = \triangle F_1AN = \triangle K_1BT = \triangle L_1BT$. За властивістю відрізків дотичних $NF_1 = F_1F$, $FK_1 = K_1T$. Але точка F — середина відрізка AB, а $AF_1 = K_1B$. Отже, $G_1N = NF_1 = F_1F =$

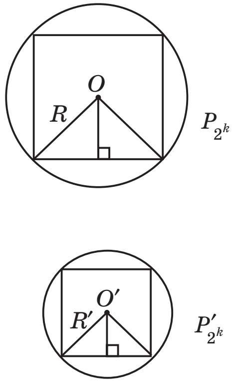


Рис. 159. До обґрунтування формули довжини кола

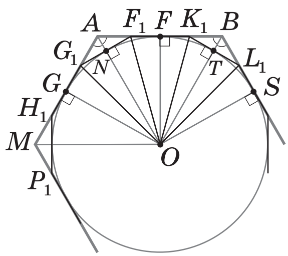
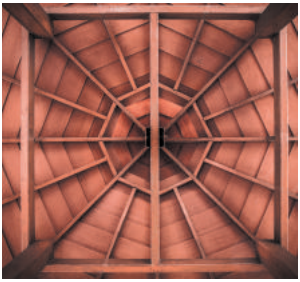


Рис. 160



$= FK_1 = K_1T = TL_1$. Звідси $G_1F_1 = F_1K_1 = K_1L_1$. Аналогічно можна довести, що всі сторони многокутника $G_1F_1K_1L_1...H_1$ рівні. Розглянемо тепер кути $G_1F_1K_1$ і $F_1K_1L_1$. Вони рівні як суміжні з відповідними кутами в рівних трикутниках F_1AN і K_1BT. Аналогічно доводимо, що всі кути многокутника $G_1F_1K_1L_1...H_1$ рівні.

Отже, 2^{k+1}-кутник $G_1F_1K_1L_1...H_1$, описаний навколо кола радіуса R, є правильним. Із цього згідно з лемою про периметр опуклих многокутників випливає, що $Q_{2^k} > Q_{2^{k+1}} > P_4$, де P_4 — периметр квадрата, вписаного в те саме коло. За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\overline{C}$, до якої наближаються периметри Q_{2^k} правильних описаних 2^k-кутників. Покажемо, що ця границя дорівнює довжині кола C. Розглянемо правильні 2^k-кутники — описаний і вписаний — для кола радіуса R (рис. 161) Їхні периметри дорівнюють відповідно $Q_{2^k} = 2^k \cdot AB$ і $P_{2^k} = 2^k \cdot KL$. Отже,

$$\frac{P_{2^k}}{Q_{2^k}} = \frac{KL}{AB} = \frac{KF}{KB} = \cos\angle BKF = \cos\angle KOF = \frac{OF}{OK} = \frac{OF}{R}.$$

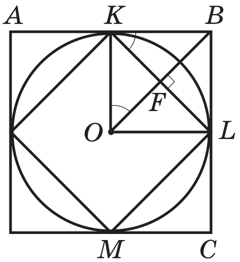


Рис. 161

Розглянемо величину $\cos\frac{180^\circ}{2^k} = \cos\angle KOF = \frac{OF}{R}$ за умови необмеженого зростання k. Оскільки $KL = \frac{P_{2^k}}{2^k} < \frac{Q_4}{2^k}$, то зі зростанням k довжина відрізка KL, а отже, й відрізка KF, наближається до нуля. За теоремою Піфагора $OF = \sqrt{R^2 - KF^2}$, тому OF прямує до R зі зростанням k.

Отже, величина $\frac{P_{2^k}}{Q_{2^k}} = \cos\frac{180^\circ}{2^k} = \frac{OF}{R}$ наближається до 1, тобто з необмеженим зростанням k

$\frac{P_{2^k}}{Q_{2^k}} \to 1$, інакше кажучи, $\frac{C}{\overline{C}} = 1$, або $\overline{C} = C$, що й треба було довести.

Перейдемо тепер до розгляду площі круга.

Назвемо простою фігуру, яку можна розбити на скінченну кількість трикутників. За означенням дана фігура має площу S, якщо існують прості фігури, які містяться в даній, і прості фігури, що містять дану, площі яких як завгодно мало відрізняються від S.

Розглянемо площу круга, ґрунтуючись на цьому означенні.

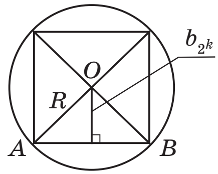


Рис. 162

Очевидно, що площі S_{2^k} правильних вписаних у дане коло 2^k-кутників (рис. 162) дорівнюють $S_{2^k} = 2^k \cdot S_{\triangle AOB} = 2^k \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot b_{2^k} = \frac{1}{2} P_{2^k} \cdot R \cdot \cos\frac{180^\circ}{2^k}$.

Отже, за умови необмеженого зростання k маємо: $S_{2^k} \to \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

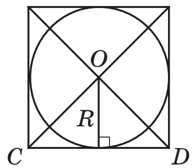


Рис. 163

Аналогічно, площі S'_{2^k} правильних 2^k-кутників, описаних навколо даного кола (рис. 163), дорівнюють $S'_{2^k} = 2^k \cdot S_{\triangle COD} = 2^k \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot CD = \frac{1}{2} Q_{2^k} \cdot R$. За умови необмеженого зростання k маємо:

$S'_{2^k} \to \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

Отже, S_{2^k} та S'_{2^k} з необмеженим зростанням k як завгодно мало будуть відрізнятися від числа πR^2, тобто $S_{\text{круга}} = \pi R^2$ за означенням.

Довідкові матеріали

Таблиця значень тригонометричних функцій

Градуси	$\sin\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\cos\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	Градуси
0	0,000	0,000	—	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,335	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
Градуси	$\cos\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\sin\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	Градуси

Закінчення таблиці

Градуси	$\sin\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\operatorname{tg}\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	$\cos\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 45°)$	Градуси
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градуси	$\cos\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\operatorname{tg}\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	$\sin\alpha$ $(45° \leqslant \alpha \leqslant 90°)$	Градуси

Таблиця квадратів натуральних чисел від 1 до 99

Одиниці / Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Теми навчальних проєктів

До розділу I

1. Застосування тригонометричних співвідношень у будівництві.
2. Застосування властивостей трикутників для розв'язування алгебраїчних задач.
3. Практичні задачі на розв'язування трикутників.
4. Дослідження властивостей чотирикутників та їх застосування.

До розділу II

1. Застосування геометричного методу координат в алгебрі.
2. Полярні координати на площині та їх застосування.
3. Задачі оптимізації. Застосування методу координат в економіці. Геометричні основи лінійного програмування.
4. Дослідження кривих методом координат. Парабола, гіпербола та еліпс. Застосування кривих в оптиці та техніці.

До розділу III

1. Застосування геометричних переміщень у мистецтві та архітектурі.
2. Інверсія відносно кола. Застосування інверсії для розв'язування задач.
3. Теорія перспективи у мистецтві та комп'ютерній графіці.
4. Паркети і бордюри на площині. Правильні та архімедові паркети.

До розділу IV

1. Псевдоскалярний добуток векторів та його застосування.
2. Порівняння алгебраїчного та геометричного підходів до побудови теорії векторів. Застосування векторів для розв'язування алгебраїчних задач.
3. Застосування координатно-векторного методу для дослідження афінних перетворень.
4. Застосування векторів у фізиці.

До розділу V

1. Ізопериметрична задача. Ізопериметричні властивості правильних многокутників. Застосування цих властивостей.
2. Геометрія кіл в оптиці: лінзи та «серпики».
3. Кола, що дотикаються. Застосування їх властивостей у мистецтві, техніці та архітектурі.
4. Рух по колу. Дослідження його властивостей та застосування в техніці.

Відповіді та вказівки

Розділ I. Розв'язування трикутників

10. а) $60°$ і $120°$; б) $120°$; в) $135°$. 11. а) $\approx 0{,}174$ і $\approx -0{,}176$; б) $\approx 40°$ і $\approx 140°$. 12. а) 0,6; б) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) 0. 13. $-0{,}8$ і $-0{,}75$. 17. а) $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = -1$. 18. а) $-\frac{24}{7}$; б) $-\frac{5}{12}$. 20. а) $\cos^2\alpha$; б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. 21. а) $\sin^2\alpha$; б) 1. 22. 0,6 і $-0{,}8$. 23. $\frac{5}{13}$ і $-\frac{12}{13}$. 28. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ або $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. 29. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ або $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. *Вказівка*. Складіть праві й ліві частини заданої рівності й основної тригонометричної тотожності. 30. а) $170°$, $120°$, $50°$; б) $170°$, $50°$, $120°$; в) $120°$, $170°$, $50°$. 31. а) $\sin\alpha > \sin\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$; в) $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{ctg}\beta$. 32. 3 см і $3\sqrt{3}$ см. 33. 255 см^2 або $68\sqrt{13}$ см^2. 39. а) 7 см; б) 13 см; в) 19 см. 40. 35 см. 41. $135°$. 43. 9. 44. 5 см або $\sqrt{41}$ см. 45. 7 см. 46. а) 5 см і $\sqrt{109}$ см; б) 14 см і $2\sqrt{129}$ см. 47. $a\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$ і $a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$ або, за умови розв'язування без теореми косинусів, $2a\cos\frac{\alpha}{2}$ і $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. 48. $2\sqrt{13}$ см і 14 см. 49. а) Тупокутний; б) прямокутний; в) гострокутний. 50. $\frac{1}{5}$, $\frac{5}{7}$,

$\frac{19}{35}$; гострокутний. 51. а) 38 см; б) 8 см і 14 см. 52. 8 см і 9 см. 53. $4\sqrt{7}$ см. 54. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. 55. 19 см. 58. 4 см. *Вказівка*. Доведіть, що $ABCK$ — рівнобічна трапеція, і застосуйте теорему косинусів у трикутнику ACD. 59. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см, $4\sqrt{2}$ см. 60. 45° і 135°. 67. 1 і $\sqrt{3}$. 68. а) 4 см; б) 30°. 69. а) 6 см; б) 45°. 70. 30° або 150°. 71. 9 м. 72. $\sqrt{2}$. 74. 8 см. 75. $AC = 12$ м, $AB \approx 6{,}21$ м, $BC \approx 8{,}78$ м. 76. $2\sqrt{2}$. 77. $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$, $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$. 78. $\frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$. 79. 24 см, $8\sqrt{3}$ см, $8\sqrt{3}$ см. 80. 30°, 60°, 90° або 30°, 120°, 30°. 81. $m\left(3+\sqrt{6}\right)$, $m\left(2+\sqrt{6}\right)$. 82. $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$, $\frac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. 83. *Вказівка*. Якщо H — ортоцентр трикутника ABC, то $\angle AHB = 180° - \angle C$. 84. 10,625 см. 85. 60° і 120°. 86. $AD > DB$. 92. 150°, ≈3,11 см, ≈3,11 см. 93. 90°, 5 см, $5\sqrt{3}$ см. 94. а) $\alpha = 105°$, $b \approx 7{,}32$, $c \approx 5{,}18$; б) $\gamma = 30°$, $a \approx 7{,}71$, $c \approx 3{,}92$. 95. а) $c = 19$, $\alpha \approx 13°$, $\beta \approx 107°$; б) $a = 13$, $\beta \approx 28°$, $\gamma \approx 32°$. 96. Встигнуть. 97. а) $\gamma = 76°$, $b \approx 16{,}78$, $c \approx 18{,}11$; б) $c = 13$, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 22°$. 98. а) $\alpha \approx 22°$, $\beta \approx 8°$, $\gamma = 150°$; б) $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$, $\gamma = 90°$. 99. а) $\beta \approx 21°$, $\gamma \approx 39°$, $c \approx 8{,}69$; б) $\gamma \approx 32°$, $\alpha \approx 142°$, $a \approx 11{,}65$ або $\gamma \approx 148°$, $\alpha \approx 26°$, $a \approx 8{,}24$; в) розв'язків немає. 100. а) $\alpha \approx 13°$, $\beta \approx 107°$, $\gamma = 60°$; б) $\beta \approx 30°$, $\gamma \approx 128°$, $c \approx 12{,}62$ або $\beta \approx 150°$, $\gamma \approx 8°$, $c \approx 2{,}22$. 101. а) $a = 4$, $\alpha \approx 42°$, $\beta \approx 108°$, $b \approx 5{,}70$ або $a = 4$, $\alpha \approx 138°$, $\beta \approx 12°$, $b \approx 1{,}23$; б) $\gamma = 45°$, $c = 13$, $\alpha \approx 112°$, $\beta \approx 23°$ або $\gamma = 135°$, $c \approx 22{,}56$, $\alpha \approx 32°$, $\beta \approx 13°$. 102. $\angle BAD = 15°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle ADB = 105°$, $AB = 4$ см, $AD \approx 3{,}59$ см, $BD \approx 1{,}07$ см. 103. а) Гострокутний; б) тупокутний; в) гострокутний або тупокутний. 104. $\frac{\sin(\beta+\gamma)\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}}{\sin\gamma}$. 105. $\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{c\sin\beta}$. 106. $\frac{l\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta}$. 107. $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$. 108. 50 м. 109. ≈28 см. *Вказівка*. Доведіть, що діагональ трапеції є бісектрисою кута при більшій основі. 110. $\approx 8,26$ см. *Вказівка*. Доведіть, що діагональ трапеції є бісектрисою кута при меншій основі. 111. Якщо $a \geqslant b$ — один розв'язок; якщо $a < b$, то при $a > b\sin\alpha$ — два розв'язки, при $a = b\sin\alpha$ — один розв'язок, при $a < b\sin\alpha$ — розв'язків немає. 112. а) $a \approx 10$, $b \approx 14,14$, $c \approx 19,32$; б) $a = 20$, $\alpha \approx 83°$, $\beta \approx 27°$, $\gamma \approx 70°$. 113. а) $a \approx 16$, $b \approx 19$, $c \approx 5$; б) $a = 4\sqrt{13}$, $b = 10$, $c = 2\sqrt{73}$. 114. $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + \beta)}$, $BO = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$, $AO = \sqrt{b^2 + \frac{a^2\sin^2\gamma}{\sin^2(\alpha + \gamma)} - \frac{2ab\sin\gamma\cos\beta}{\sin(\alpha + \gamma)}}$. 115. $\frac{ab}{a + b}$. 116. 30 см^2. 117. 96 см^2.

123. а) 30; б) $9\sqrt{3}$; в) 20. 124. а) $54\sqrt{3}$ см^2; б) 24 см^2; в) 36 см^2. 125. а) 25 см^2; б) $16\sqrt{2}$ см^2; в) 18 см^2. 126. 8 см. 127. 30° і 150°. 128. 12 м. 129. а) 84; б) 156; в) 84; г) 204. 130. 720 см^2. 131. 12. 132. а) 3 см і 6,25 см; б) 2 см і 12,5 см. 133. 3 і 32,5. 134. а) $\frac{h_b h_c}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{h_b^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha + \beta)}$. 135. а) $16\sqrt{3}$ см^2; б) 40 см^2; в) 25 см^2. 136. а) 200 см^2; б) $6\sqrt{3}$ см^2. *Вказівка*. Знайдіть найбільший кут трикутника. 137. 18 см. 138. 3 см і $3\sqrt{3}$ см. 140. а) 12 і 1,5; б) 8 і 2; в) 15 і 3. 141. а) 8 і 10,625; б) 16 і 21,25. 143. 6 см і 12,5 см. 144. 4 см і 8,125 см. 145. 84 см^2. *Вказівка*. Проведіть через вершину тупого кута пряму, паралельну діагоналі трапеції. 146. 48 см^2. *Вказівка*. Проведіть через вершину тупого кута пряму, паралельну бічній стороні трапеції. 147. 12 см, 600 см^2. 148. 42,5 см. 149. 3,8 м. 150. 30 см. 151. 6 см. 152. $\sqrt{37}$ м і $\sqrt{93}$ м. 156. $\angle C = 180° - (\alpha + \beta)$, $AB = 2R\sin(\alpha + \beta)$, $BC = 2R\sin\alpha$, $AC = 2R\sin\beta$. 158. $240\sqrt{3}$ см^2. 159. $\sqrt{65}$ см або 17 см. 160. До вершини найбільшого кута. 161. 24 см, 20 см, 20 см. 162. $21\frac{2}{3}$ см. 163. 18. *Вказівка*. Три медіани трикутника при перетині

ділять даний трикутник на шість рівновеликих трикутників. 164. 2. *Вказівка*. Нехай R — радіус описаного кола. Виразіть через R довжини відрізків BN і CN та запишіть теорему косинусів у трикутниках ABN і ACN. 166. 27 см. 167. *Вказівка*. Розгляньте два випадки: коли сторони a, b, c, d йдуть послідовно та коли це не справджується. 168. *Вказівка*. За допомогою теореми косинусів доведіть, що синус кута між сторонами a і b дорівнює $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. 170. $2\frac{9}{13}$ см. *Вказівка*. Якщо AC — гіпотенуза трикутника, O — центр вписаного кола, то $\angle AOC = 135°$. Скористайтеся методом площ у трикутнику AOC. 171. $\frac{ab}{4}$. 172. $\frac{ab}{b-a}$. *Вказівка*. Проведіть через вершину меншої основи пряму, паралельну бічній стороні, і застосуйте до отриманого трикутника теорему косинусів, враховуючи, що сума квадратів бічних сторін трапеції дорівнює a^2+b^2.

Розділ II. Координати на площині

182. а) $B(-1;\ 5)$; б) $A(-3;\ 1)$. 183. а) $E(12;\ 1)$; б) $D(5;\ -19)$. 184. а) $D(6;\ 9)$; б) $A(-3;\ 2)$. 186. а) 10; б) $\sqrt{82}$; в) 13. 187. а) -2 або 6; б) 2. 188. 16. 191. а) $B(-4;\ -3)$; б) $B(4;\ 3)$. 192. $x=2$, $y=-1$. 193. а) $D(3;\ 0)$; б) $D(4;\ 5)$. 194. $D(-1;\ -1)$. 195. M. 196. а) $(3;\ 0)$; б) $(0;\ -3)$. 197. AC. 198. 5. 199. $2\sqrt{2}$. 202. $(2;\ -6)$, $(6;\ 4)$, $(-6;\ 10)$. *Вказівка*. Дані точки разом із кожною із шуканих вершин утворюють паралелограм. 204. $(2;\ 5)$. 206. 10. *Вказівка*. Доведіть, що даний трикутник прямокутний. 207. $P=24$, $S=24$. 209. Середина гіпотенузи. 217. A, C, D. 218. а) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; б) $x^2+y^2=25$; в) $x^2+(y-1)^2=4$. 219. $(x-1)^2+$

$+ (y-1)^2 = 25$; C, D. 220. а) (8; 6), (8; –6); б) (–8; –6), (8; –6). 221. (–4; 0), (0; 0), (0; 2). 222. (0; 3), (0; –1), $\left(\sqrt{3};0\right)$, $\left(-\sqrt{3};0\right)$. 223. B, C, E. 224. а) $x = -6$; б) $y = 2$; в) $x + 3y = 0$. 225. $x + y = 0$; B. 226. а) (7; 3); б) (–2; 0) і (0; –6); в) (2; 2) і (–2; –2). 227. (0; –3). 228. (3; –3). 229. а) (3; –1), $R = 4$; б) (0; –5), $R = 1$. 230. а) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; б) $(x+4)^2 + (y-9)^2 = 4$; в) $x^2 + (y+2)^2 = 1$. 231. а) $x^2 + y^2 = 36$; б) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25$. 232. $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 25$; (0; 2) і (0; 8). 233. $(x-2)^2 + y^2 = 4$; $(x+2)^2 + y^2 = 4$. 234. а) $4x - y - 2 = 0$; б) $x + 2y = 0$; в) $x + y + 3 = 0$. 235. $x = -1$, $x - y = 0$, $x + 3y - 8 = 0$. 236. а) (–1; –2); б) (0; 1); в) (2; –2). 237. а) (–3; 1) і (6; 4); б) (2; 1) і (2; –1). 238. (3; 6); (1; 4); (5; 4). 239. а) $x^2 + (y-1)^2 = 25$; б) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ або $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 8$. 240. $(x+3)^2 + y^2 = 25$ або $(x-5)^2 + y^2 = 25$. 243. $2\sqrt{2}$. 244. 12; $2x - 3y + 3 = 0$. 246. 15 см, 20 см, 25 см. 253. а) $2x + 3y - 5 = 0$; б) $x + y = 0$. 254. $2x - y - 1 = 0$ і $x + 2y - 3 = 0$. 258. а) $2x - y + 5 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 5$. 259. $4x - 4y + 5 = 0$. 260. а) $y = \sqrt{3}x + 1$; б) $y = -x - 1$. 261. $3x + 4y - 25 = 0$, $3x + 4y + 25 = 0$. 262. $x - 3y + 7 = 0$ або $x - 3y - 13 = 0$. 263. Чверть кола, радіус якого дорівнює половині довжини драбини. 270. Коло радіуса $0{,}5R$, яке дотикається до даного кола внутрішньо в точці A, окрім цієї точки. *Вказівка*. Виберіть систему координат так, що $O(0; 0)$ — центр даного кола, $A(R; 0)$. 271. Пряма, яка проходить через середину N сторони AB перпендикулярно до CN. 273. а) $D(1; 2)$; б) $D(0; 1)$. 274. $C(7; 3)$, $D(4; -2)$. 276. (0; 1) або (0; 9). 277. а) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, $x \neq -3$, $x \neq 7$; б) $x = -3$ або $x = 7$, $y \neq 1$. 278. $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$. 279. $x + y - 1 = 0$. 281. $x - 7y + 25 = 0$. 282. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. 283. $\sqrt{13}$. 284. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$. 286. $k = \pm\frac{4}{3}$. 287. $C(2; 1)$.

Розділ III. Геометричні перетворення

299. $\angle K = 70°$, $\angle N = 90°$. 300. $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = 100°$. 304. $60°$ і $120°$. 305. $\angle A = \angle D = 40°$, $\angle B = \angle C = 140°$. 329. а) $(8; -1)$; б) $(0; 9)$; в) $(-4; 6)$. 330. а) $(-4; -3)$; б) $(-a; -b)$. 333. а) $(3; 9)$; б) $(-2; 5)$; в) $(8; 0)$. 334. а) $(a; -b)$; б) $(-a; b)$. 335. а) $y = -x$; б) $y = -x$; в) $y = x$. 337. а) $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 25$; б) $(x+6)^2 + (y-5)^2 = 25$. 338. а) $y = -2$; б) $y = -x - 1$. 341. а) $(x+16)^2 + (y-3)^2 = 25$; б) $x = -2$. 342. а) $x^2 + (y-6)^2 = 4$; б) $x = 0$. 351. $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(4; -4)$. 369. а) $(-4; 1)$; б) $(5; -4)$. 370. У напрямі додатної півосі осі Ox на 4 одиниці. 371. а) $(-3; 7)$; б) $(5; -1)$. 372. а) Ні; б) так. 373. $x' = x - 9$, $y' = y + 5$. 377. $x' = x + 4$, $y' = y - 5$. 378. $x^2 + (y-6)^2 = 36$. 379. $A'(2; 1)$, $C'(5; 2)$. 381. Точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків AA' і BB'. 382. Покласти першу монету в центр столу, а решту монет — симетрично відносно центра столу до ходів суперника. 383. Брати стільки ж цукерок, скільки взяв перший гравець, але з іншої коробки (тобто робити ходи, симетричні ходам першого гравця).

397. 109 см. 398. 320 м^2. 399. 40 см^2. 400. *Вказівка*. Застосуйте симетрію відносно даної точки. 401. *Вказівка*. Застосуйте симетрію відносно прямої l. 402. *Вказівка*. Застосуйте поворот на $90°$ навколо точки D. 403. 10 см. *Вказівка*. Застосуйте паралельне перенесення в напрямі променя OO_1 на 10 см. 405. Точка перетину продовжень бічних сторін. 407. а) 0,5; б) 2. 408. а) $(-1; 5)$; б) $(1; 4)$. 409. 1500 см^2. 410. 24 см^2. 411. *Вказівка*. Застосуйте симетрію відносно серединного перпендикуляра до третьої сторони. 412. *Вказівка*. Відобразіть менше коло симетрично відносно будь-якої його точки A. Шукана пряма проходить через точку A і точку перетину образу меншого кола з більшим. 413. *Вказівка*. Застосуйте поворот навколо точки A на $90°$, внаслідок якого точка D переходить у точку B. 414. *Вказівка*. Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$) —

шукана трапеція. Застосуйте паралельне перенесення діагоналі BD в напрямі променя AD на відстань BC. 417. $\sqrt{2}:2$. 419. 252 см^2. 420. Коло, гомотетичне даному відносно його центра з коефіцієнтом 0,5. 423. Так. 424. $x' = x - 3$, $y' = y - 3$; $D(2;\ 1)$. 427. а) Середина відрізка OO_1; б) пряма AB; в) довільна точка X прямої AB, $\angle OXO_1$; г) промінь OO_1 (або O_1O), відстань OO_1. 431. *Вказівка.* Застосуйте симетрію одного з даних кіл відносно прямої l. 435. *Вказівка.* Застосуйте гомотетію з центром A. 436. *Вказівка.* Застосуйте гомотетію з центром у вершині даного кута.

Розділ IV. *Вектори на площині*

450. а) $\overrightarrow{(4;\ 5)}$; б) $\overrightarrow{(-3;\ 4)}$; в) $\overrightarrow{(0;\ -4)}$. 452. а) 25; б) 5; в) 3. 453. а) $\overrightarrow{AB}\,(8;\ -6)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 10$; б) $\overrightarrow{AB}\,(-12;\ -5)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 13$. 454. (3; 2), (–2; 7). 455. (3; –9). 456. $A(0;\ -2)$. 458. 3, $4\sqrt{2}$, $\sqrt{65}$. 459. 9 і 7. 460. а) Ромб; б) прямокутник; в) трапеція. 463. 9 або –5. 464. (1; 2) або (–1; –2). 465. 8 або –8. 466. (3; 1), $\sqrt{10}$. 467. Так. 468. Ні. 471. 90°. 485. а) $\overrightarrow{(-4;\ 1)}$ і $\overrightarrow{(-2;\ -3)}$; б) $\overrightarrow{(4;\ -4)}$ і $\overrightarrow{(0;\ -10)}$. 486. а) a; б) $a\sqrt{3}$; в) a; г) $a\sqrt{3}$. 487. а) $0{,}5a$; б) a; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) a. 490. а) $\vec{a}$; б) $-\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$. 491. а) $-\vec{a}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$. 492. а) $\overrightarrow{(1;-8)}$; б) $\overrightarrow{(3;\ 7)}$; в) $\overrightarrow{(-2;\ -13)}$. 493. а) $\overrightarrow{(1;\ 2)}$; б) $\overrightarrow{(3;\ 6)}$; в) $\overrightarrow{(2;\ 4)}$. 494. а) $\overrightarrow{(9;\ -1)}$; б) $\overrightarrow{(-8;\ -3)}$; в) $\overrightarrow{(8;\ 3)}$. 495. а) 5; б) 5; в) 2,5. 496. а) 13; б) 10; в) 12. 499. а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $-\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$. 500. а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $-\vec{a}-\vec{b}$. 502. а) Ні; б) так; в) так. 506. $x + 2y = 0$. 507. 90°. 517. а) –2 або 2; б) $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$. 518. а) $\vec{b}\,(1;\ -6)$; б) $\vec{b}\,(-18;\ -27)$. 521. $\overrightarrow{AB}\,(4;\ -6)$, $\overrightarrow{BM}\,(-2;\ 3)$. 523. 4; ні. 524. а) 2; б) 30.

525. а) 0; б) 1. 526. а) −8; б) −2; в) 18. 527. а) 90°; б) 45°. 529. 6. 530. а) $\vec{c}\,(4;\ 3)$, $|\vec{c}|=5$; б) $\vec{c}\,(13;\ -13)$, $|\vec{c}|=13\sqrt{2}$. 531. −3. 534. $\overrightarrow{AB}=0{,}5\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CB}=-0{,}5\vec{a}-\vec{b}$. 535. $\overrightarrow{AD}=0{,}5\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{CD}=-0{,}5\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. 537. 14; так. 538. 6, так або −6, ні. 539. $\angle A=60°$, $\angle B\approx 22°$, $\angle C\approx 98°$. 540. $\angle A=\angle C=45°$, $\angle B=90°$. 542. −1. 543. −1. 547. $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. 548. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\vec{a}$. 549. 60°. 550. 0. 551. а) $2\sqrt{10}$; б) 1,5; в) 0. *Вказівка*. Знайдіть скалярний квадрат шуканого вектора. 552. 120°. 553. 18 см і 48 см. 554. 34 см; прямокутник. 565. *Вказівка*. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}$. 567. 30°. 568. 7. 569. а) 120°; б) 4 см. 570. а) 120°; б) 2 см. 572. 8,5 см. 573. *C*. 574. $\vec{b}\,(2;\ -4)$. 575. 45°. 576. −18; 18; 0. 577. а) 0,5; б) 1,12 м/с. 578. $a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$, де μ — коефіцієнт тертя. 580. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що вектори-доданки мають рівні довжини і співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ відповідно. 581. *Вказівка*. Спочатку доведіть, що $AH\perp BC$. Для цього покажіть, що $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. 582. *Вказівка*. Застосуйте формулу Гамільтона з попередньої задачі і формулу $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$. 584. 120°. 586. *Вказівка*. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BK}$ і $\overrightarrow{CM}$ за двома неколінеарними векторами і доведіть, що точки попарного перетину вказаних в умові задачі прямих збігаються.

Розділ V. Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга

596. а) 4; б) 5; в) 18. 597. а) 108°; б) 120°; в) 144°. 598. а) 12; б) 12. 601. а) 4 см; б) $2\sqrt{2}$ см; в) 9 см. 602. а) $3\sqrt{3}$ см^2; б) 4 см; в) 24 см. 604. $2\sqrt{3}$ см. 605. 4 см. 607. а) 6; б) 5; в) 12. 608. а) 50 см; б) 6 см. 611. а) $24\sqrt{3}$ см^2; б) 48 см^2; в) 16 см.

612. а) 8 см^2; б) $27\sqrt{3}$ см^2; в) 6 см і 3 см. 616. 6 і 10. 617. а) 6; б) 5. 618. $4:3\sqrt{3}:6$. 619. $9:8\sqrt{3}:18$. 620. $6\sqrt{3}$ см^2. 622. 3 : 4. 623. $2\sqrt{2}R^2$. 624. $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 626. *Вказівка*. Доведіть, що під час повороту на 90° вказаний вектор-сума перейде у нульовий вектор. 627. 30°, 170° і 160°. 628. 5 см і 2 см. 636. а) 12π см; б) 2 см. 637. а) 12π см; б) 8π см; в) 10π см. 639. ≈ 1,4 м. 640. ≈ 42 097 км. 641. а) $\frac{\pi R}{2}$; б) $\frac{3\pi R}{4}$; в) $\frac{17\pi R}{9}$. 642. 10π см. 643. ≈ 6 см. 644. ≈ 452 м^2. 645. а) 144π см^2; б) 9π см^2. 646. а) 16π см^2; б) 49π см^2. 647. 3π, 5π і 7π. 648. 26 см. 649. а) 27π; б) 40π; в) 6π. 650. $\frac{1}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$, $\frac{1}{12}\left(10\pi+3\sqrt{3}\right)$. 651. а) 6π см; б) 10π см; в) $2\sqrt{3}\pi$ см. 652. 156 см^2. 653. а) 24π см; б) 50π см. 654. а) $3\sqrt{2}\pi$; б) 6π. 655. а) 6π; б) 15π. 656. ≈ 2,5 м і ≈ 40 м. 657. 1 м. 658. а) 625π см^2; б) 27π см^2. 659. а) 16π см^2; б) 9π см^2. 661. $\sqrt{\frac{10S}{3\pi}}$. 662. а) $\frac{R^2}{12}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$; б) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; в) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$. 663. а) $\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$; б) $\frac{R^2}{12}\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)$. 664. б) 6π. 665. б) $6\sqrt{2}\pi$. 666. 4π см^2. 667. 100π см^2. 668. $\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$см^2. 669. $1{,}5\sqrt{3}R^2$. 670. $(2\pi+8)$ см. 671. а) Ні (контрприклад — ромб); б) так. 672. $\frac{3\sqrt{3}S}{8}$. 673. $\frac{a}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$. 674. $0{,}75l$. 675. πa^2. 676. Ні: його кути рівні через один. 678. $1{,}25\pi a$. *Вказівка*. Дане коло є описаним навколо рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. 680. $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка*. Доведіть, що трикутники NAM, KBN, LCK і LDM рівносторонні. 681. $\left(36\sqrt{3}-16{,}5\pi\right)$ см, $4{,}5\left(2-\sqrt{3}\right)$ см. *Вказівка*.

Обчисліть площу трапеції O_1BCO_2 і відніміть від неї площі двох секторів. 682. *Вказівка*. Доведіть, що під час повороту на центральний кут даного n-кутника вказаний вектор-сума не змінюється, тобто є нульовим вектором.

Задачі на повторення курсу геометрії 7–9 класів

683. 11 см. 684. 40°. 688. 25°, 65°. 689. 40°, 50°. 690. Більше за 13 см, але менше за 17 см. 693. 50° і 130°. 695. 70°, 55°, 55° або 110°, 35°, 35°. 696. 10 см. 697. 112 см і 63 см. 698. 36 см, $30\sqrt{3}$ см^2. 699. $12\sqrt{3}$ см^2. 700. 5 см. 701. 156 см^2. 702. 225π см^2. 703. $\frac{b\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\beta}$. 704. 5. 706. $\vec{0}$. 707. 45°, 45°, 90°.

Предметний покажчик

Зміст

Розділ III. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Розділ IV. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

**Розділ V. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ.
ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА**

Особливості підручника

- багаторівнева побудова навчального матеріалу
- авторська система усних, графічних та письмових вправ
- тематичне узагальнення і систематизація матеріалу
- доступність викладення, зручність користування
- наявність тем навчальних проєктів

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити інтерактивне онлайн-тестування за кожною темою
- переглянути відеоуроки за темами курсу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-підтримка
за QR-кодом
або посиланням
rnk.com.ua/100627